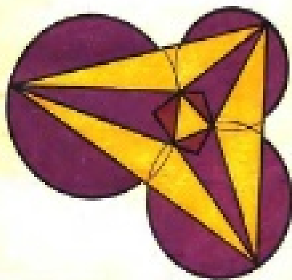
美国新数学丛书



几何学的新探索

H.S.M.考克塞特　S.L.格雷策　著

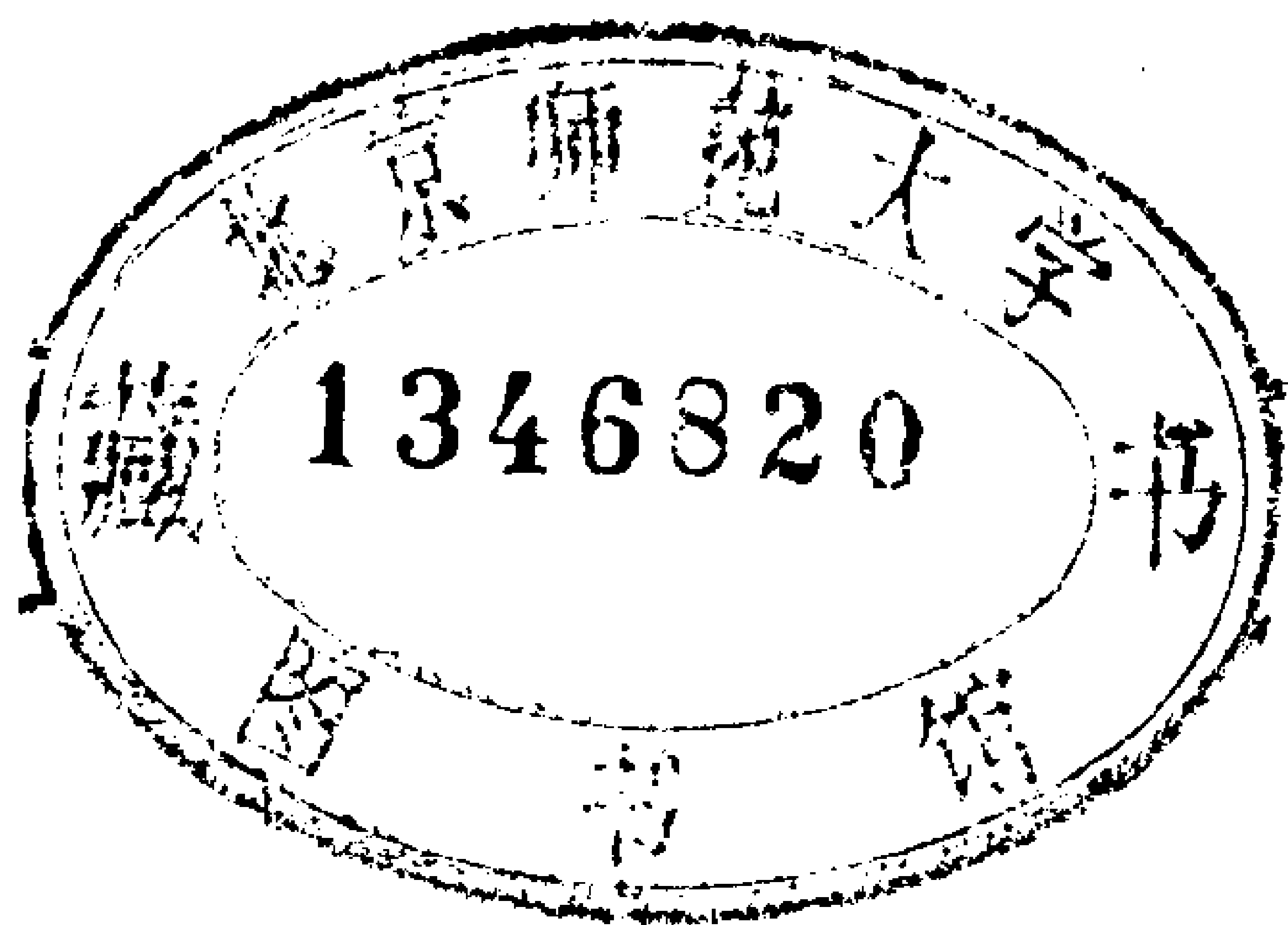


北京大学出版社

几何学的新探索

H.S.M. 考克瑟特
S.L. 格雷策 著

陈维桓 译



北京大学出版社

几何学的新探索

H.S.M.考克瑟特
S.L.格雷策 著

陈维桓 译

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
通县燕山印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 7.375印张 150千字
1986年1月第一版 1986年1月第一次印刷
印数：00001—15,000册
统一书号：13209·120 定价：1.50元

內 容 提 要

本书的主要目的是利用变换的观念重新探索我们的先辈所钟爱的初等几何学的领域；这种观念有助于增长读者对几何的理解力。本书把几何学与其它的数学分支联系起来了。特别是，第五章把读者引导到反演几何学，它在分析学中有重要的应用；第六章介绍了圆锥曲线，特别强调焦点、离心率的概念，这些概念显然与彗星、行星、人造卫星的轨道的研究有关。全书由浅入深地把读者从十分简单的概念逐步带到各论题的核心。全书给出的习题既包括了在教科书范围内的问题，也包括了一些对于读者来说较为困难的问题。

H.S.M.Coxeter and S.L.Greitzer

GEOMETRY REVISITED

作 者 简 介

考克瑟特(H.S.M.Coxeter)生于伦敦，1929年在剑桥大学获得硕士学位，1931年获得哲学博士学位，从1931年到1935年，他是剑桥三一学院的成员；此后，他一直是加拿大多伦多大学教授。

考克瑟特教授从1949年到1958年编辑 Canadian Journal of Mathematics. 他是许多国家数学会的成员，是英国皇家学会的会员，一直是美国数学协会的副主席。

考克瑟特教授在结晶学，群论和几何学的联系及其它数学领域有过贡献，他还写过好几本书。其中有：The Real Projective Plane(1955), Non-Euclidean Geometry(1957), Introduction to Geometry(1961), Regular Polytopes(1963)和Projective Geometry(1964)。

格雷策 (Samuel L.Greitzer)在1906年从俄国奥德萨移民到美国。他在1927年毕业于纽约的City College, 在Yeshiva大学获得哲学博士学位。

格雷策博士有25年以上的高级中学数学教学的经验，他在 Yeshiva 大学、布鲁克林的综合技术学院、哥伦比亚大学的教师学院及 School of General Studies 教过书。现在是Rutgers大学的副教授。

格雷策博士是 Topography and Map Reading 一书的作者，也是好几本分析和代数方面的书籍的协作者，他在几何学和应用数学方面发表过论文。

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册. 有些书早已脱销. "新数学丛书"编委会，特别是Anneli Lax 教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。"新数学丛书"中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是"做数学"；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y.10012。

编辑者

目　录

序　言

谁看不起欧氏几何，谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。

H.G.弗德

中学的数学课程通常包括仅有一年的平面几何教程，或许还包括称作十年级数学的几何学及初等解析几何学教程。在学生的中学阶段早期开设的这门课通常是他接触这个主题的仅有的场合。与此相反，喜爱数学的学生却有机会学习初等代数、高等代数，甚至于更高深的近世代数。因此，自然可以料到会有偏爱代数而轻视几何的倾向。于是，弄糊涂的热心人引导学生认为几何学处在“数学的主流”之外，分析学和集合论可能会取而代之。

几何学在学校的课程设置中地位比较低，或许是因为教育者不熟悉几何学的本质以及它所取得的成就。几何学的进展包括许多漂亮的结果，例如卜立安香定理(§3.9)、费尔巴哈定理(§5.6)、彼得逊-司各特定理(§4.8)和莫莱定理(§2.9)。从历史上说，人们一定会记得，欧几里得是为准备研究哲学而深思熟虑的人们著作的。直到我们现在这个时代，讲授几何学的一个主要理由仍旧是它的公理方法被认为是学习演绎推理的最好的导论。自然，为了有成效的教育目的，着重强调了形式的方法。但是，无论是古代的、还是现代的几何学家都会毫不踌躇地采用他们所中意的那些不太正统的方法。如果三角学，解析几何学，或者向量方法能够用得上，则几何学家就会拿过来用。于是几何学家发明了自己的优雅而有力的现代技巧。采用变换(如旋转、反射、位

似变换)的方法就是这样一种技巧，它们简化了某些定理的证明，又把几何学与结晶学、美学联系起来了。几何学的这个“有生气的”方面是第四章的主题。另一个现代的技巧是反演几何学的方法，它与点和圆打交道，又把直线看作是经过“无限远点”的圆。在第五章可以领略到它的一些情趣。第三种技巧是射影几何的方法，它完全不考虑距离和角度，而强调点、线(整条的无限长的直线，不是线段)之间的类比。在那里，不仅任意两点可用一条直线联结，而且任意两条直线必相交于一点；平行的直线看作是公共点在无穷远直线上的直线。在第六章披露了这方面的若干内容。

几何学仍然具有前一代教育家对它论述过的所有那些优点，在自然界还有几何学有待人们去认识和了解。几何学(尤其是射影几何学)仍是引导学生去学习公理化方法的出色的手段，它依旧具有它一直拥有的那种优雅的魅力，其结果的美妙始终没有减退过。而且，对于科学家和应用数学家来说，几何学变得比过去任何时候都更有用，更有必要。人造卫星轨道的形状和时-空连续统的四维几何学就是这样的例子。

几个世纪以来，几何学一直在成长着。新的概念、新的处理方法不断地在发展：学生们会发现这些概念是富有挑战意味的，是令人惊讶的。让我们采用与我们的目标最适应的方法重新探索欧氏几何，由我们自己来发现一些比较新的结果。或许我们会打消一点在初次接触几何学时所产生的惊异和畏惧。

作者特别感谢安纳利·拉克斯(Anneli Lax)博士耐心的协助和许多有益的建议。

H.S.M.考克瑟特 S.L.格雷策

1967年于多伦多和纽约

第一章　与一个三角形有关的点和线

> 几何学的浩瀚的文献比算术和代数的加在一起还要多，其广泛的程度至少和分析的文献相当，这是比数学的其它部门更有意思的、然而是半遗忘的东西组成的丰富的宝库，但是匆忙的一代人无暇去欣赏它。
>
> E.T.贝尔

本章的目的是回忆某些被贝尔(Bell)博士称做“半遗忘”的东西，导出若干自欧几里得之后发展而来的新定理，然后把我们的发现用于饶有意味的情形。我们将考虑一个任意的三角形，及其最闻名的有关的点和线：外心、中线、重心、角平分线、内心、傍心、高线、垂心、欧拉线和九点圆圆心。

角平分线自然导致关于斯泰纳-莱默斯(Steiner-Lehmus)定理的讨论；一百多年来认为该定理是很难证明的，尽管从我们现在的观点来看，它实在是相当容易的。

最后，从一个三角形及一般位置的点 P 出发，我们得到以 P 向已知三角形各边引垂线的垂足为顶点的新的三角形。这种观念会导致若干有趣的进展，其中有一些要放到下一章去讨论。

§1.1　扩充的正弦定律

正弦定律是一条常用的三角学定理。遗憾的是，在教科

书中，它常常以不完全的形式出现，不如扩充的正弦定律那样有用，因此我们来证明所要求形式的正弦定律。

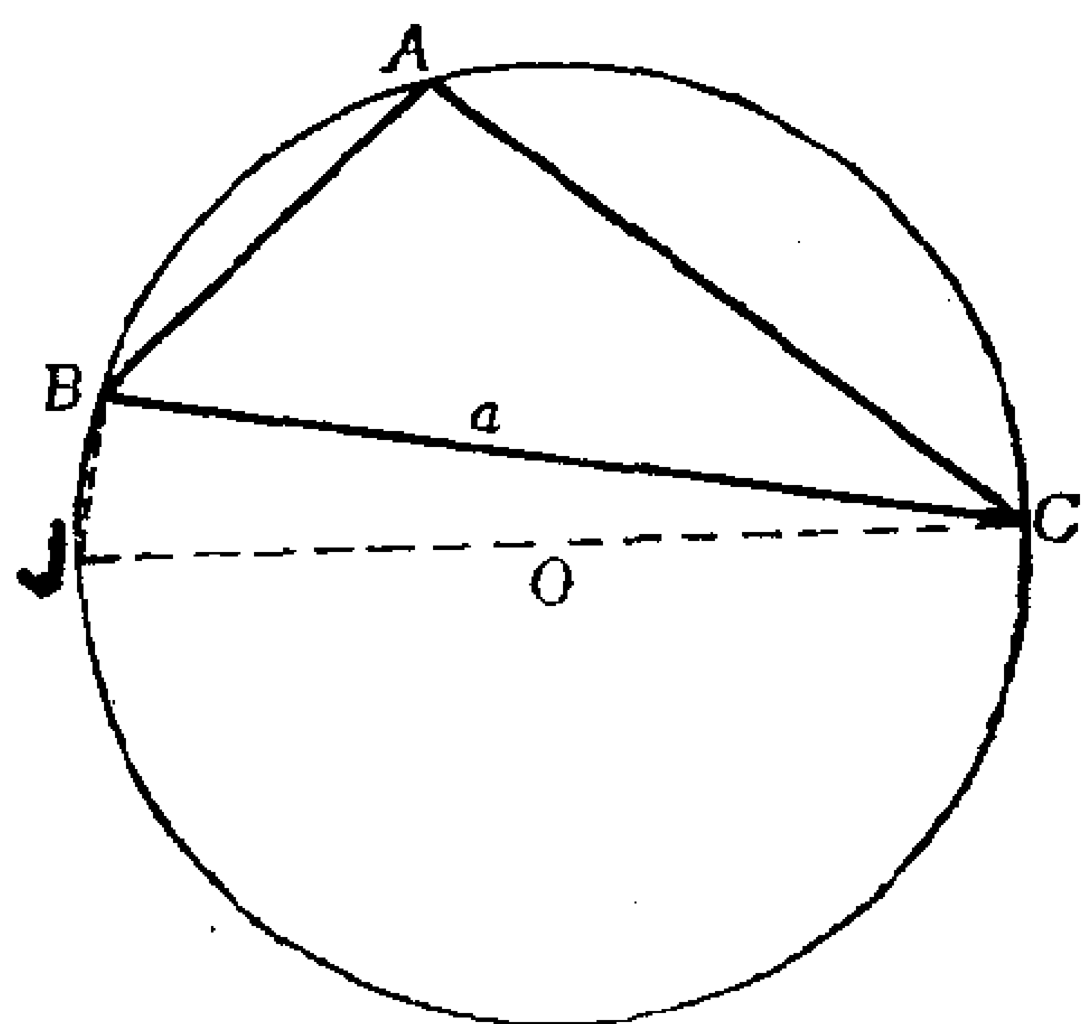


图 1.1A

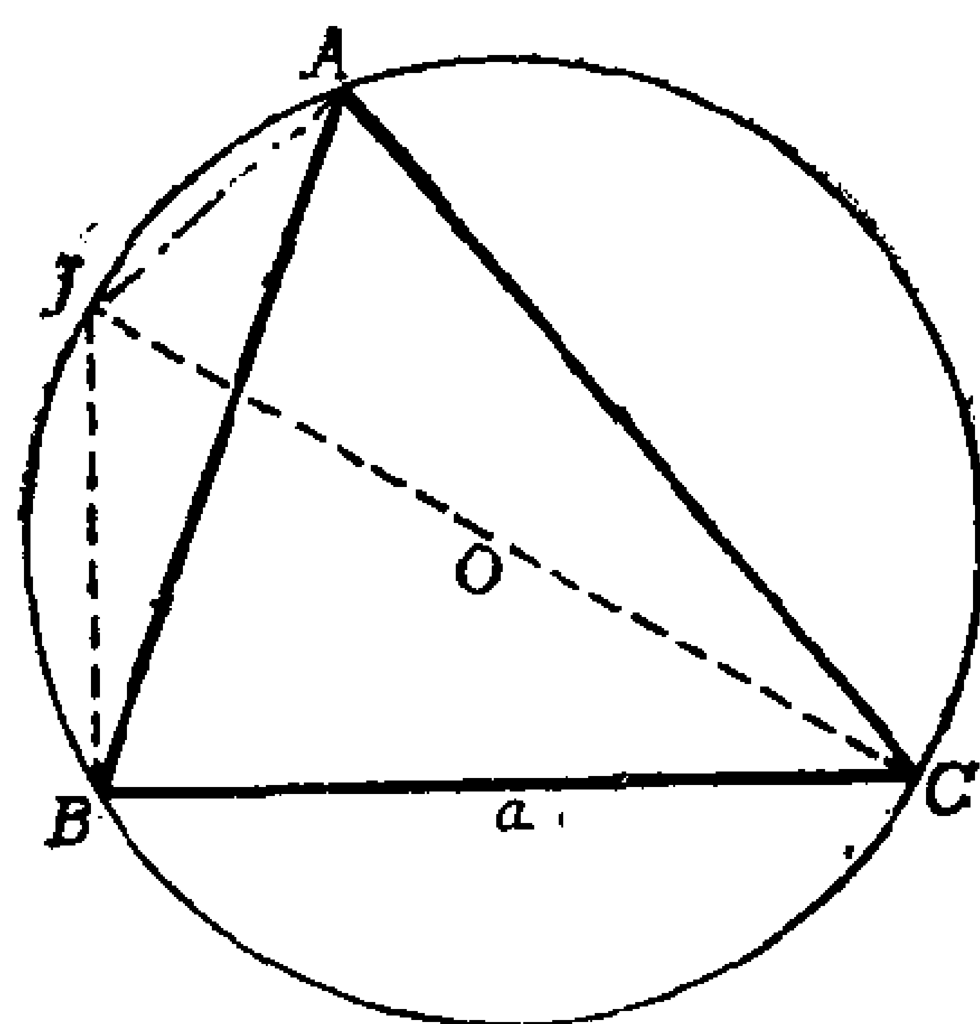


图 1.1B

我们从$\triangle ABC$着手(以惯用的方式来标记)，作它的外接圆，其圆心为O，半径是R个单位长，如图1.1A和图1.1B所示。作直径CJ和弦BJ①。在所画出的两种情形中，因为$\angle CBJ$内接于半圆周，故$\angle CBJ$是直角。因此，在这两个图中都有

$$\sin J=\frac{a}{CJ}=\frac{a}{2R}.$$

在图1.1A中，$\angle J=\angle A$，这是因为它们内接于同一个圆弧。在图1.1B中，因为$\angle J$和$\angle A$是一个圆内接四角形的对角，故它们是互补的，即$\angle J=180°-\angle A$。但是，由于$\sin\theta=\sin(180°-\theta)$，故在这两种情形都有$\sin J=\sin A$。因此，$\sin A=a/2R$，即

$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$

① 在本书中，以X和Y为端点的线段的长度简记为XY。

把同样的论证用于 $\triangle ABC$ 的另外两个角，则得

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

综合上述结果，我们可以把扩充的正弦定律叙述成：

定理1.1.1 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

我们约定，图形的面积用该图形的名称加上圆括号来表示。例如，(ABC) 表示 $\triangle ABC$ 的面积，$(PQRS)$ 表示四边形 $PQRS$ 的面积。

习　题

1. 试证①：对于任意的三角形 ABC（$\angle B$ 或 $\angle C$ 可以是钝角）有

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

利用正弦定律推导加法定理：

$$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$$

2. 在任意一个三角形 ABC 中，

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

3. 对任意一个三角形 ABC，$(ABC)=abc/4R$.

4. 设 p 和 q 是经过 A 点，且分别和 BC 相切于点 B 和点 C 的两个圆的半径，则 $pq=R^2$.

---

① 在以后的习题中，一律省去"试证"等字眼。因此，当一道习题写成定理的形式时，就是要求给出证明。

§1.2 塞瓦定理

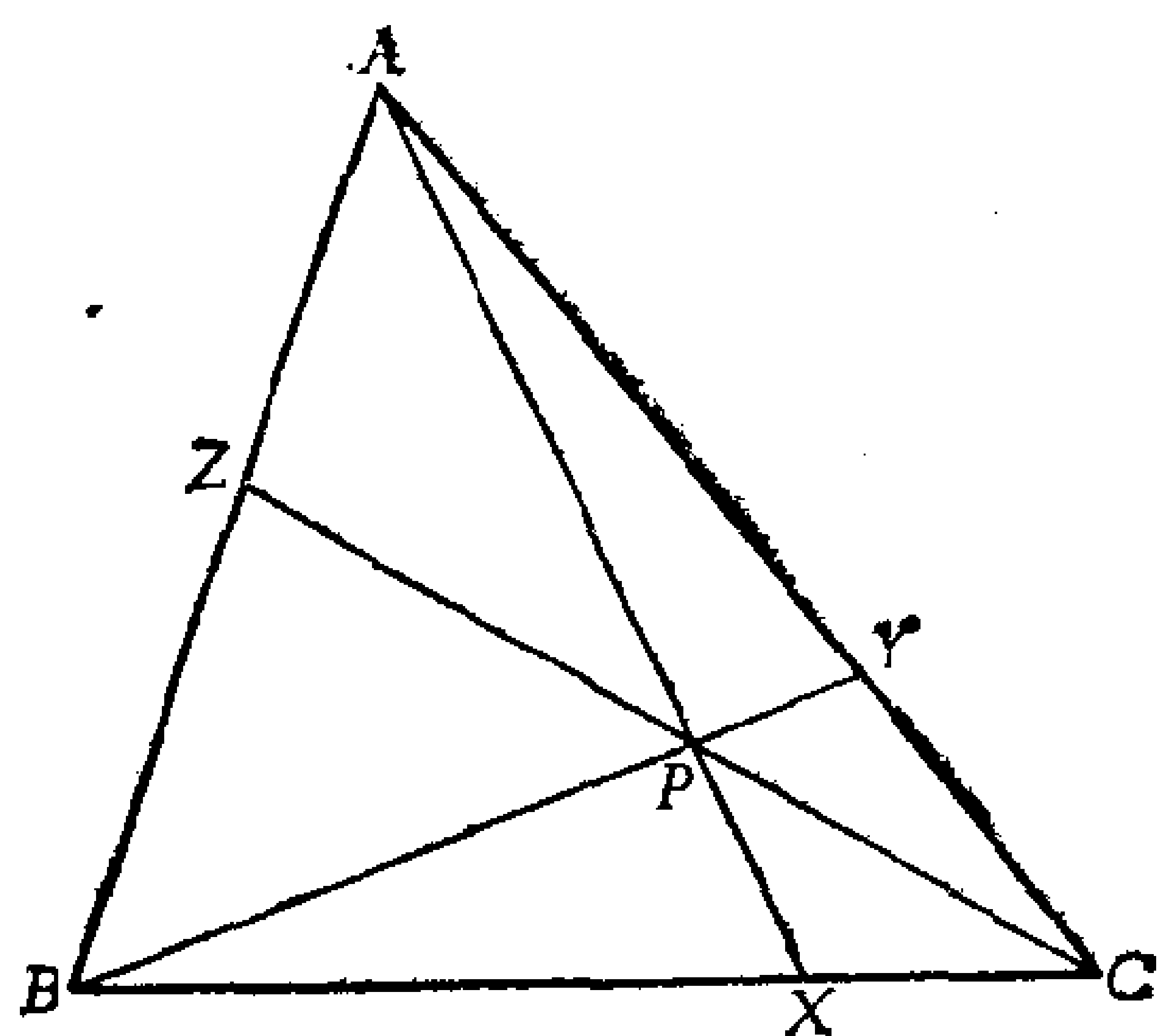


图 1.2A

三角形的一个顶点与其对边上任意一点的连线叫做塞瓦线。这样，如果X, Y, Z分别是三角形ABC的三边BC, CA, AB上的点，则线段AX, BY, CZ都是塞瓦线。这个术语取自意大利数学家塞瓦（G. Ceva）的名字，他在1678年发表了下面的十分有用的定理：

定理1.2.1 设AX, BY, CZ分别是经过三角形ABC的各顶点的塞瓦线。如果这三条线共点，则

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

所谓三条直线（或线段）是共点的，意思是它们经过同一个点，比如P点。要证明塞瓦定理，我们注意到高相等的两个三角形的面积与它们的底边成比例。参看图1.2A，我们有

$$\frac{BX}{XC}=\frac{(ABX)}{(AXC)}=\frac{(PBX)}{(PXC)}=\frac{(ABX)-(PBX)}{(AXC)-(PXC)}$$

$$=\frac{(ABP)}{(CAP)}.$$

同理，

$$\frac{CY}{YA}=\frac{(BCP)}{(ABP)},\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{(CAP)}{(BCP)}.$$

把这三个式子相乘便有

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{(ABP)}{(CAP)}\cdot\frac{(BCP)}{(ABP)}\cdot\frac{(CAP)}{(BCP)}$$

$$=1.$$

该定理的逆命题也成立：

定理1.2.2 若三条塞瓦线 AX, BY, CZ 满足关系式

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1,$$

则这三条线共点。

要得到这一结果，先假定前两条塞瓦线相交于P点，而第三条过P点的塞瓦线是CZ'。则由定理1.2.1得到

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1.$$

但是我们已有

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1,$$

因此
$$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB},$$

即Z'和Z重合。这样，我们就证明了AX, BY, CZ是共点的[9, p.54]。

习　题

1. 若X, Y, Z是各边的中点，则这三条塞瓦线是共点的。

2. 垂直于对边的各条塞瓦线是共点的。

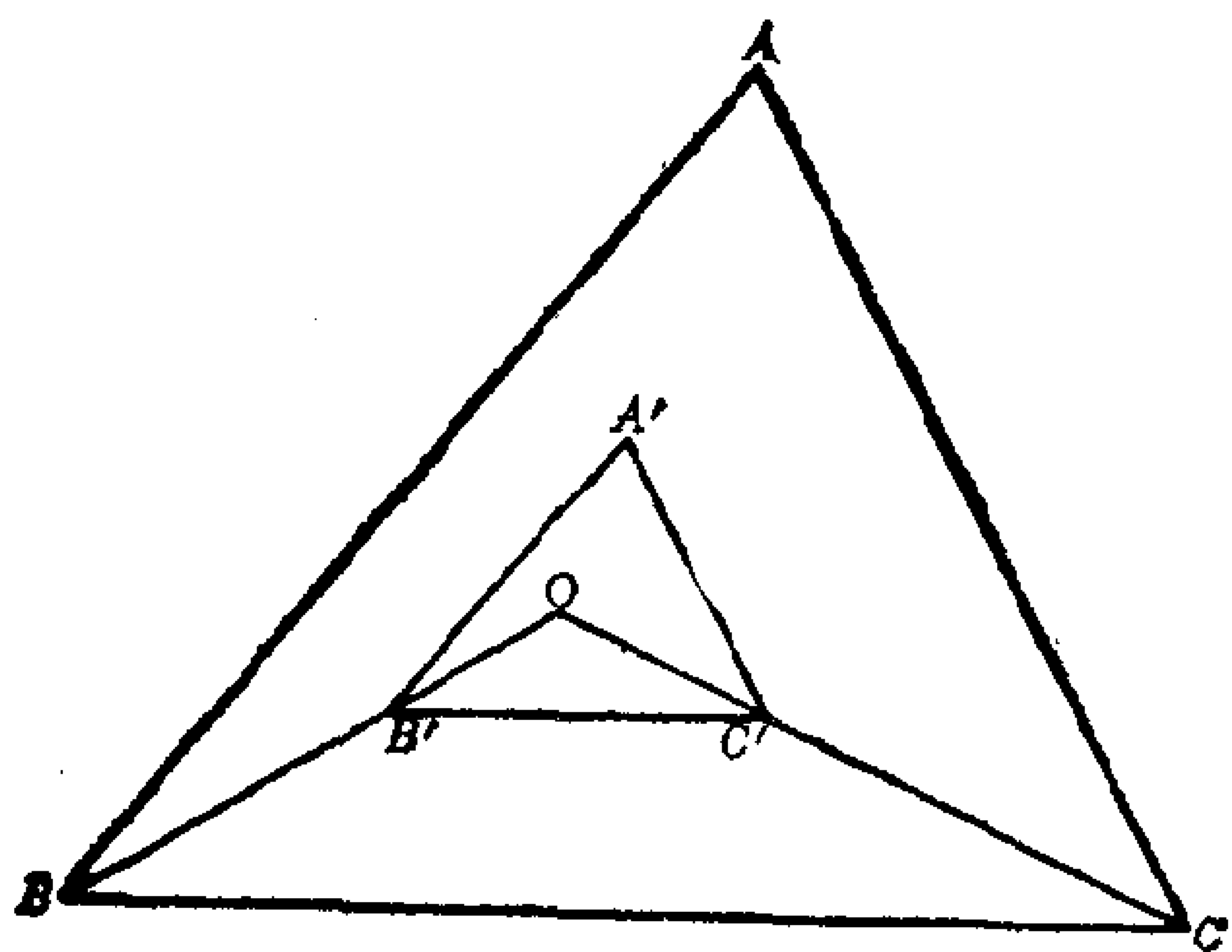


图 1.2B

3. 设ABC和$A'B'C'$是图1.2B所示的两个对应边互相平行的不全等的三角形，则三条直线AA'，BB'，CC'是共点的.（这样的两个三角形称做是位似的。我们将在§4.7作进一步的研究。）

4. 设AX是长度为p的一条塞瓦线，它把BC分成图1.2C所示的两条线段$BX=m$，$XC=n$，则

$$a(p^2+mn)=b^2m+c^2n.$$

提示：把在X处的两个互补角的余弦分别用$\triangle ABX$和$\triangle CAX$的边长表示出来，然后相加。这个结果称为斯蒂瓦特定理，是斯蒂瓦特(M. Stewart)在1746年叙述的。这个定理可能早在公元前300年左右已由阿基米德发现了，但第一个已知的证明是西姆松(R. Simson)在1751年发表的。

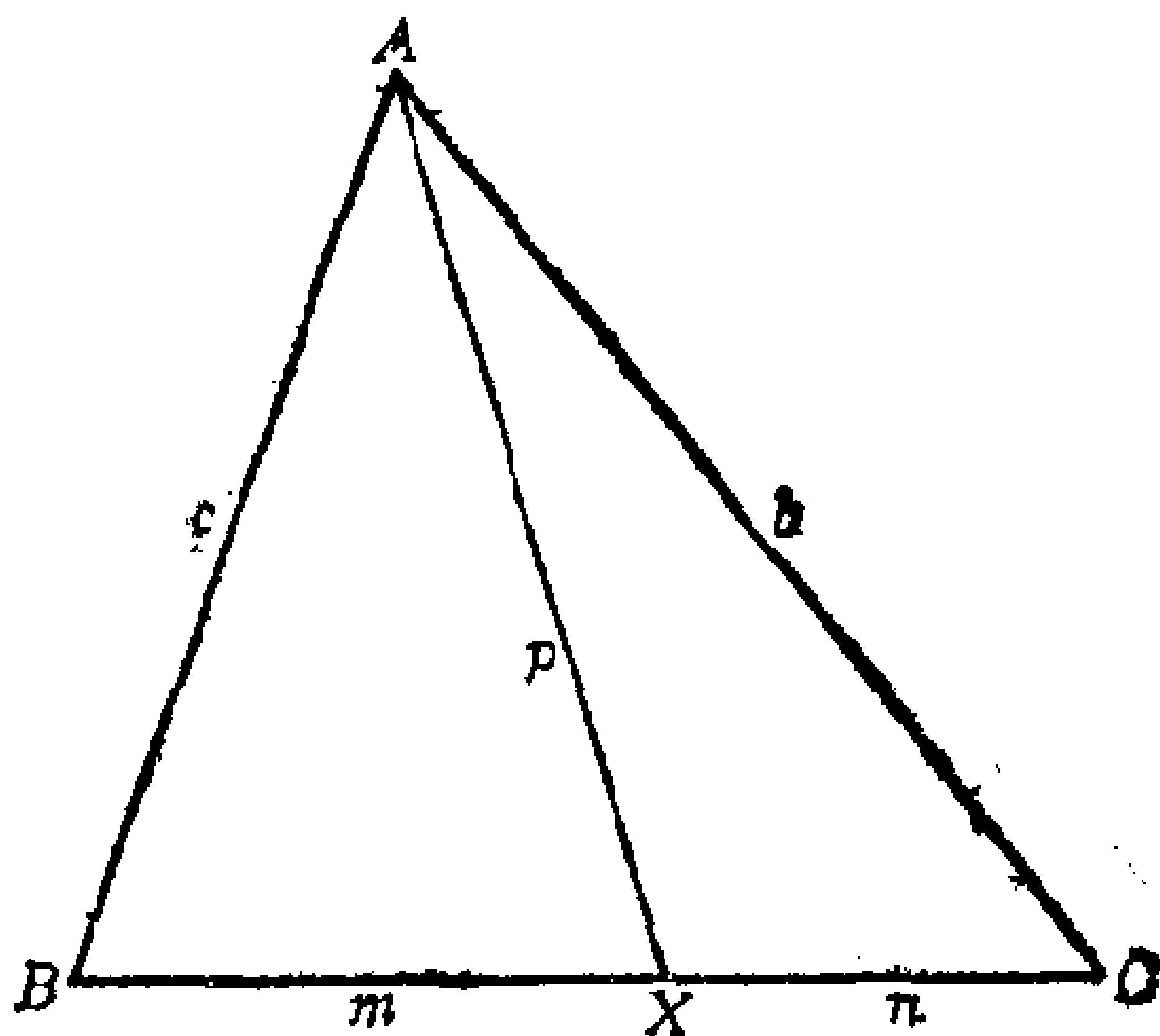


图 1.2C

§1.3 若干重要的点

与三角形有关的特殊的点和线有很多，我们不得不把注

意力集中在少数的几种情形。我们已经遇到过这样一个点，即外接于三角形的圆的圆心。我们把该点称为三角形的外心，把这个圆叫做三角形的外接圆。外心O是三角形的三条边的垂直平分线的交点（图1.3A）。外接圆半径已用字母R表示。

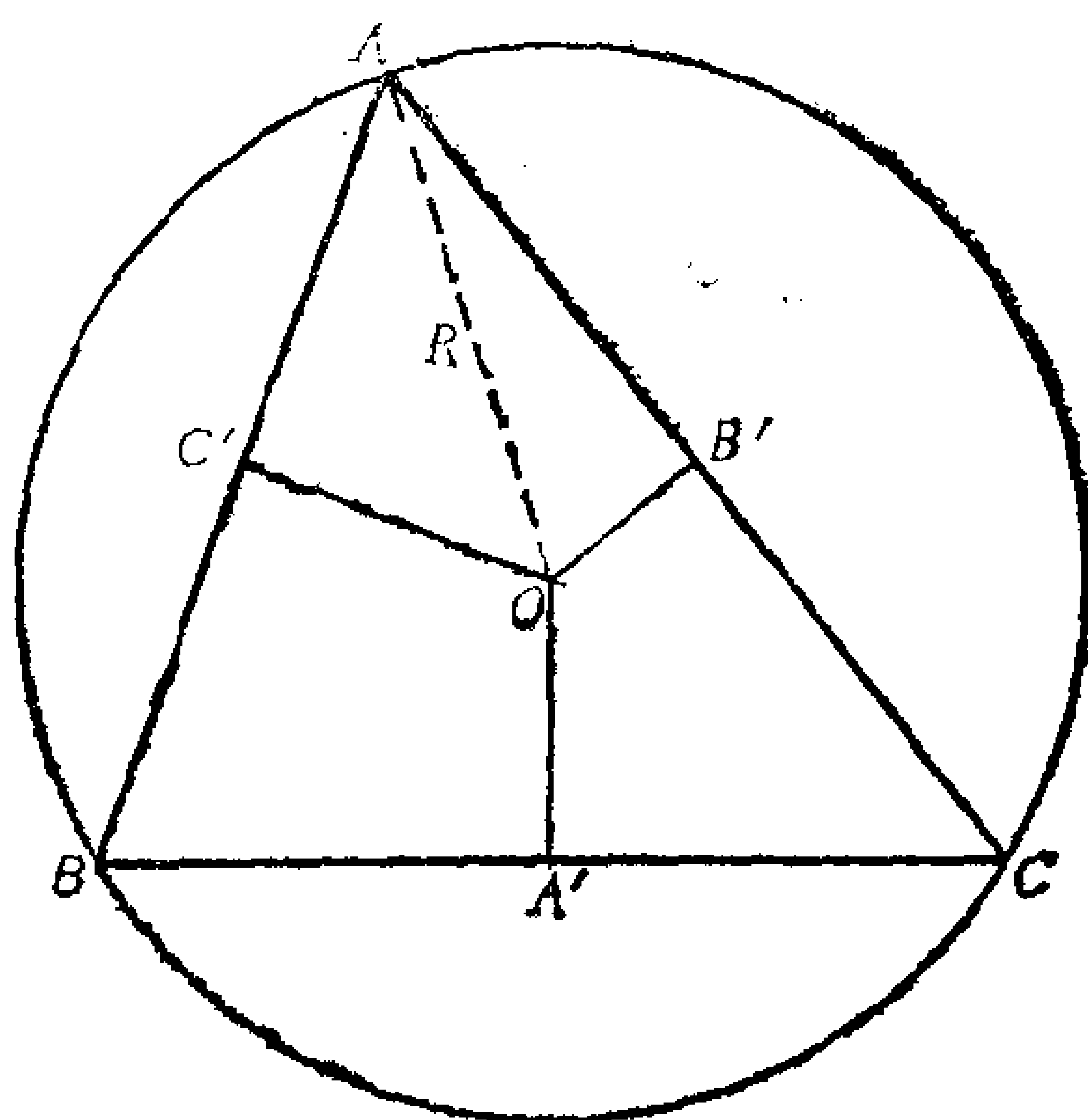


图 1.3A

联结三角形的顶点与它的对边中点的塞瓦线叫做中线。图1.3B画出的线段AA'，BB'，CC'都是中线，因此$BA'=A'C$，$CB'=B'A$，$AC'=C'B$。利用定理1.2.1，可知三条中线是共点的。它们的公共点G称为三角形的重心。如果用一种密度均匀的材料裁出一个三角形，并用细线在三条中线的公共点处把它悬挂起来，则它将保持平衡。换言之，重心恰好是这三角形在力学上的“重心”（即重力中心）。

再看图1.3B，我们注意到$(GBA')=(GA'C)$，因为这两个三角形有相等的底和高。因此，我们用同一个字母x表示这两块面积。同理，我们有

$$(GCB')=(GB'A),\quad (GAC')=(GC'B),$$

所以它们的面积分别可记作y和z。但是，我们又有$(CAC')=(CC'B)$，即$2y+z=z+2x$，因此$x=y$。同理，$(ABA')=$

$(AA'C)$，于是 $y=z$。这样，我们证明了 $x=y=z$，即

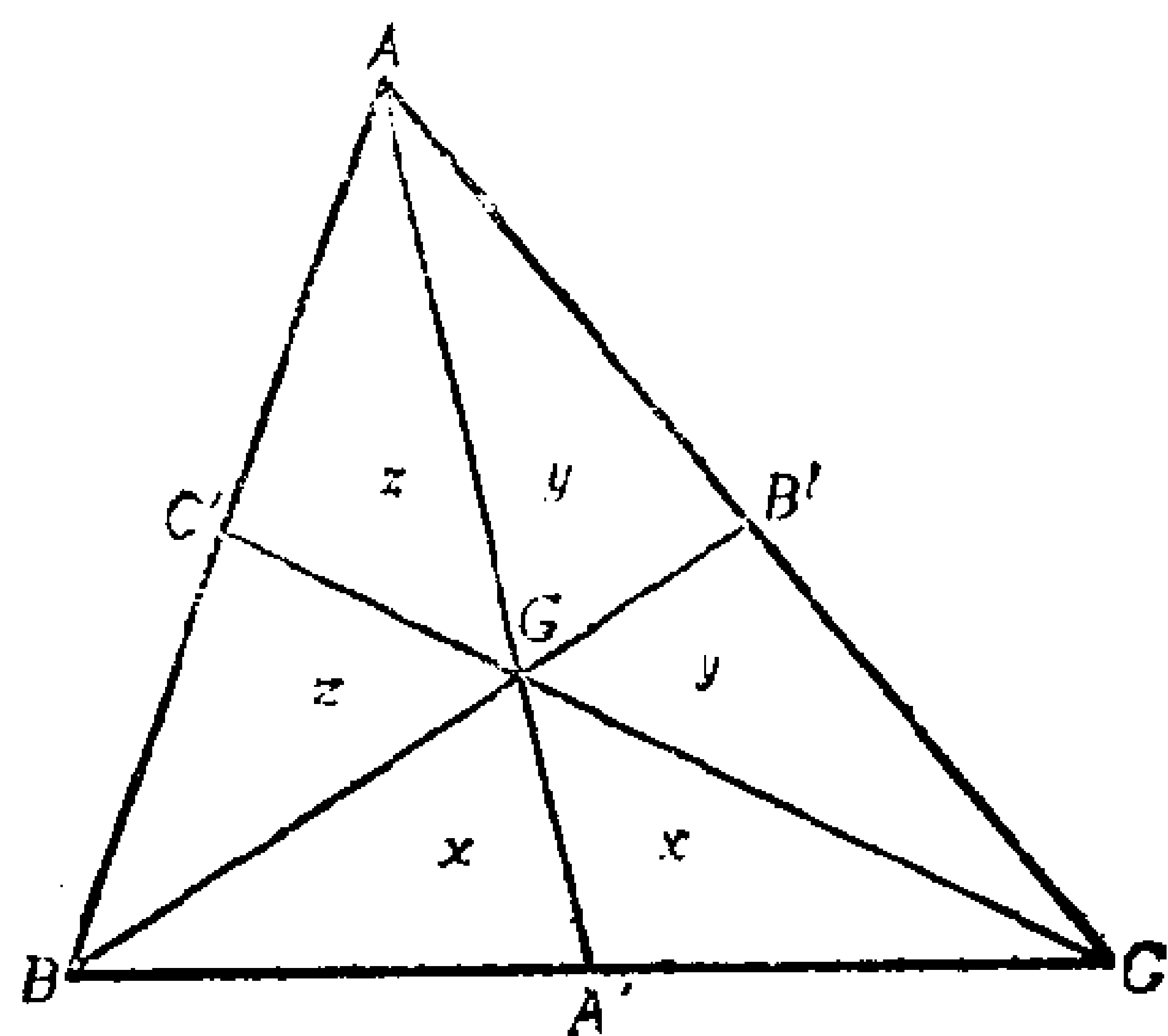


图 1.3B

定理 1.3.1 一个三角形被它的中线分成面积相等的六个小三角形。

继续考察图1.3B，我们又看到 $(GAB)=2(GBA')$。因为这两个三角形的高相等，所以 $AG=2GA'$。类似地，我们有 $BG=2GB'$，$CG=2GC'$。

定理1.3.2 三角形中线彼此截割成分比2:1；换言之，三角形的中线彼此"三等分"。

与 BC，CA，AB 分别垂直的塞瓦线 AD, BE, CF 叫做三角形 ABC 的高线(图1.3C)、正如在§1.2习题2所见，根据塞瓦定理的逆定理，这三条高线是共点的。它们的公共点称为垂心①。

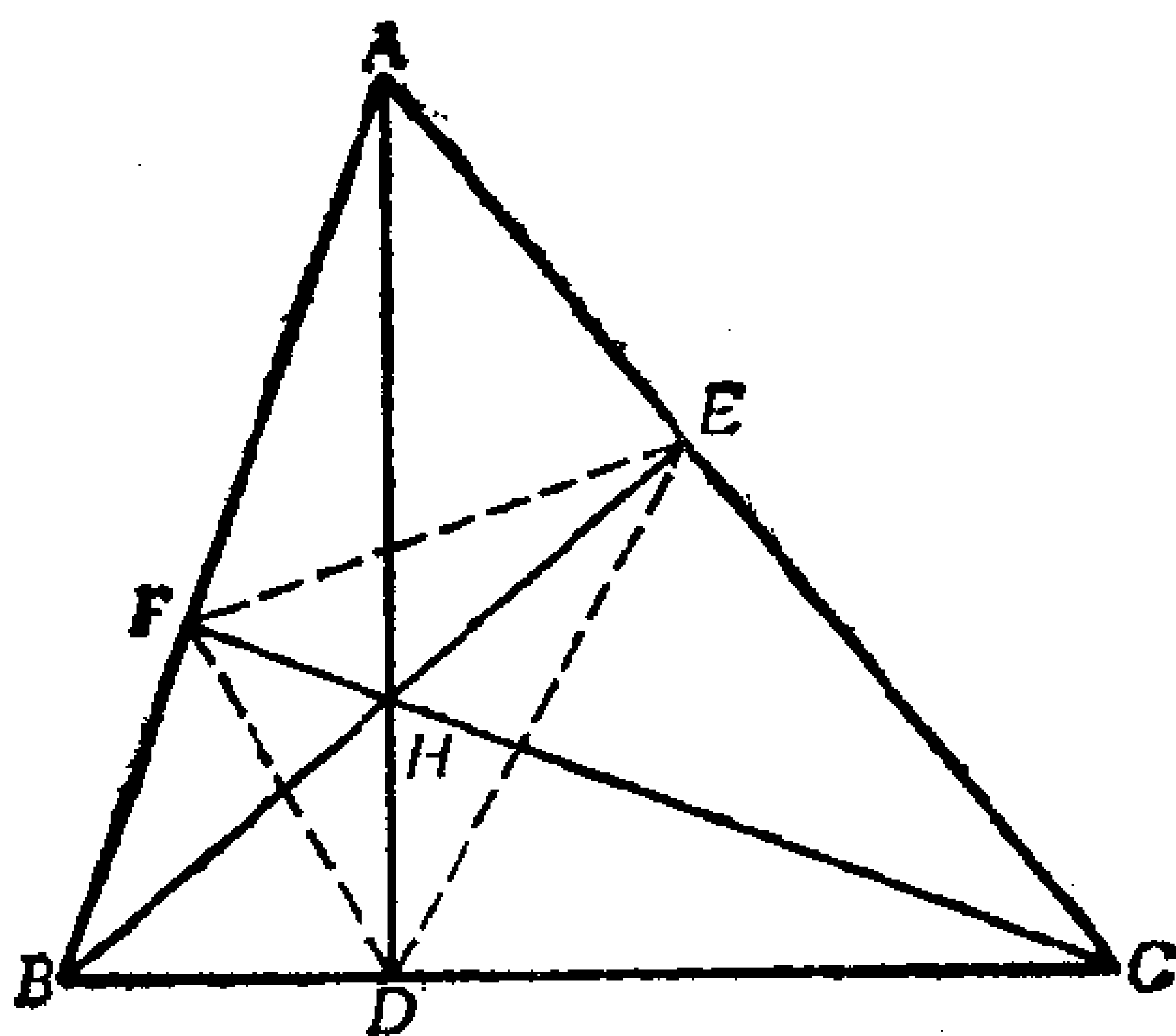


图 1.3C

① 关于该术语的历史，请参看 J. Satterly, Mathematical Gazette 45 (1962), p. 51.

点D，E，F本身自然称为高线足。把它们两两联结起来得到的$\triangle DEF$称为$\triangle ABC$的垂三角形。

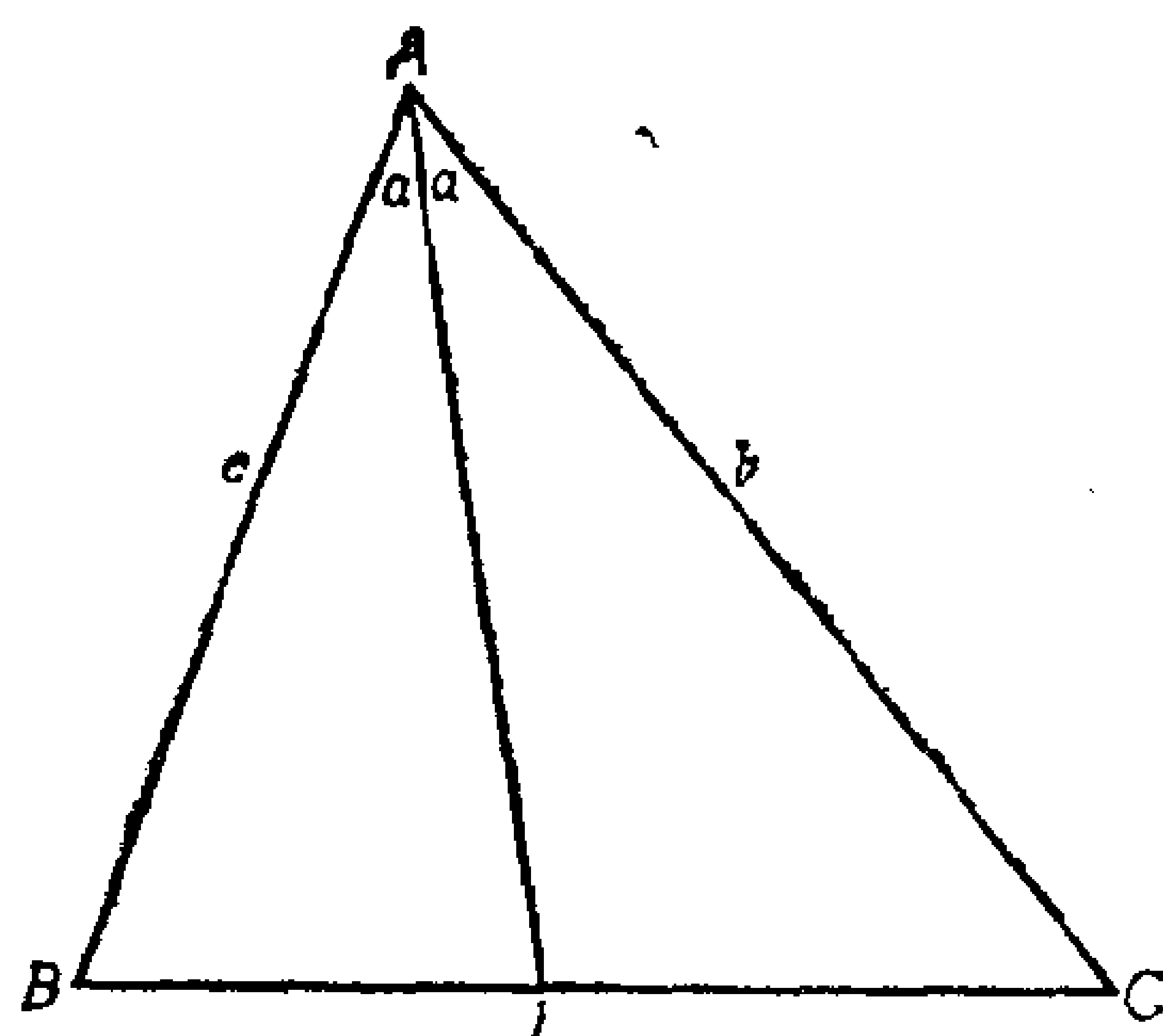


图 1.3D

另一组重要的塞瓦线是三条内角平分线。图1.3D画出了其中一条角平分线AL.将定理1.1.1用于三角形ABL和ALC(它们在L处的角是互补的，因而它们的正弦相等)，我们有

$$\frac{BL}{\sin A/2}=\frac{c}{\sin L},\qquad \frac{LC}{\sin A/2}=\frac{b}{\sin L},$$

因此
$$\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b}.$$

关于角B和C的内角平分线我们能够得到类似的结果，于是证明了：

定理1.3.3 三角形的每一条内角平分线把对边分成与邻边长度成比例的两条线段。

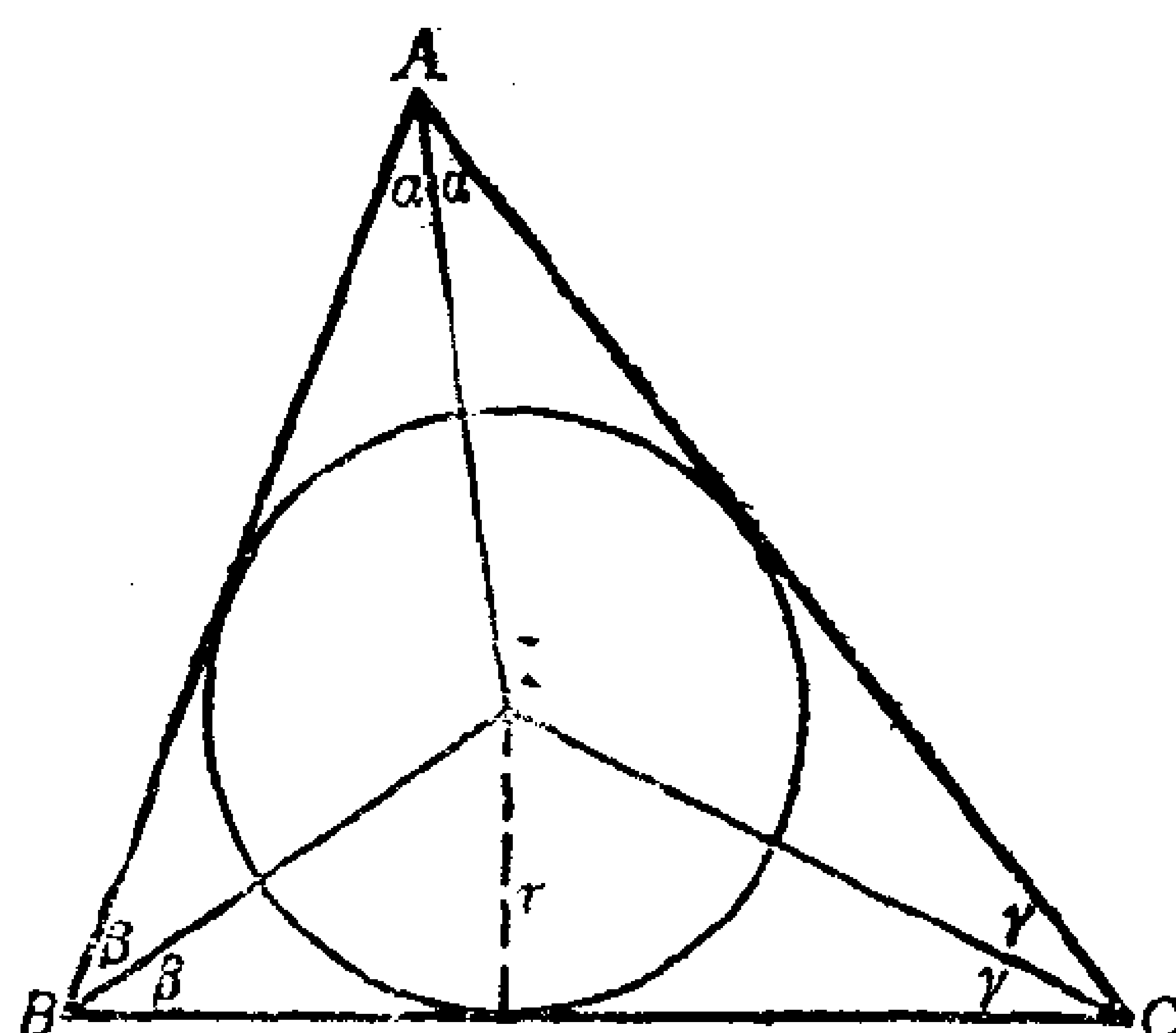


图 1.3E

AL上任意一点到CA和AB的距离相等(图1.3D)。同理，角B的

内角平分线上任意一点到AB和BC是等距的。因此，两条内角平分线的交点I到三边的距离相等，记作r：

定理1.3.4 三角形的三条内角平分线是共点的。

以I为圆心，以r为半径的圆(图1.3E)与三角形的三条边相切，因此它是三角形的内切圆。我们把I叫做内心，把r叫做内切圆半径。

习　题

1. 钝角三角形的外心和垂心落在三角形的外部。

2. 试求已知三角形与以它的三条中线为边长的三角形的面积之比。

3. 有两条中线相等的三角形是等腰三角形。

4. 有两条高线相等的三角形是等腰三角形。

5. 利用定理1.2.2和定理1.3.3，给出定理1.3.4的另一个证明。

6. 用a，b，c表示中线AA'的长度(图1.3B)。

7. 内角平分线AL(图1.3D)的长度的平方等于

$$bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

8. 在边长分别为3，4，5的直角三角形中，求直角的内角平分线的长度。

9. 一个三角形的两边的乘积等于外接圆直径与第三边上的高线的乘积。

§1.4 内切圆和傍切圆

图1.4A表明，内切圆和边BC，CA，AB在点X，Y，Z处相切。因为从圆外一点向圆所作的两条切线的长度相等，所

以 $AY=AZ, BZ=BX, CX=CY$。依次用 x，y，z 记这些线段，则

$$y+z=a,$$
$$z+x=b,$$
$$x+y=c.$$

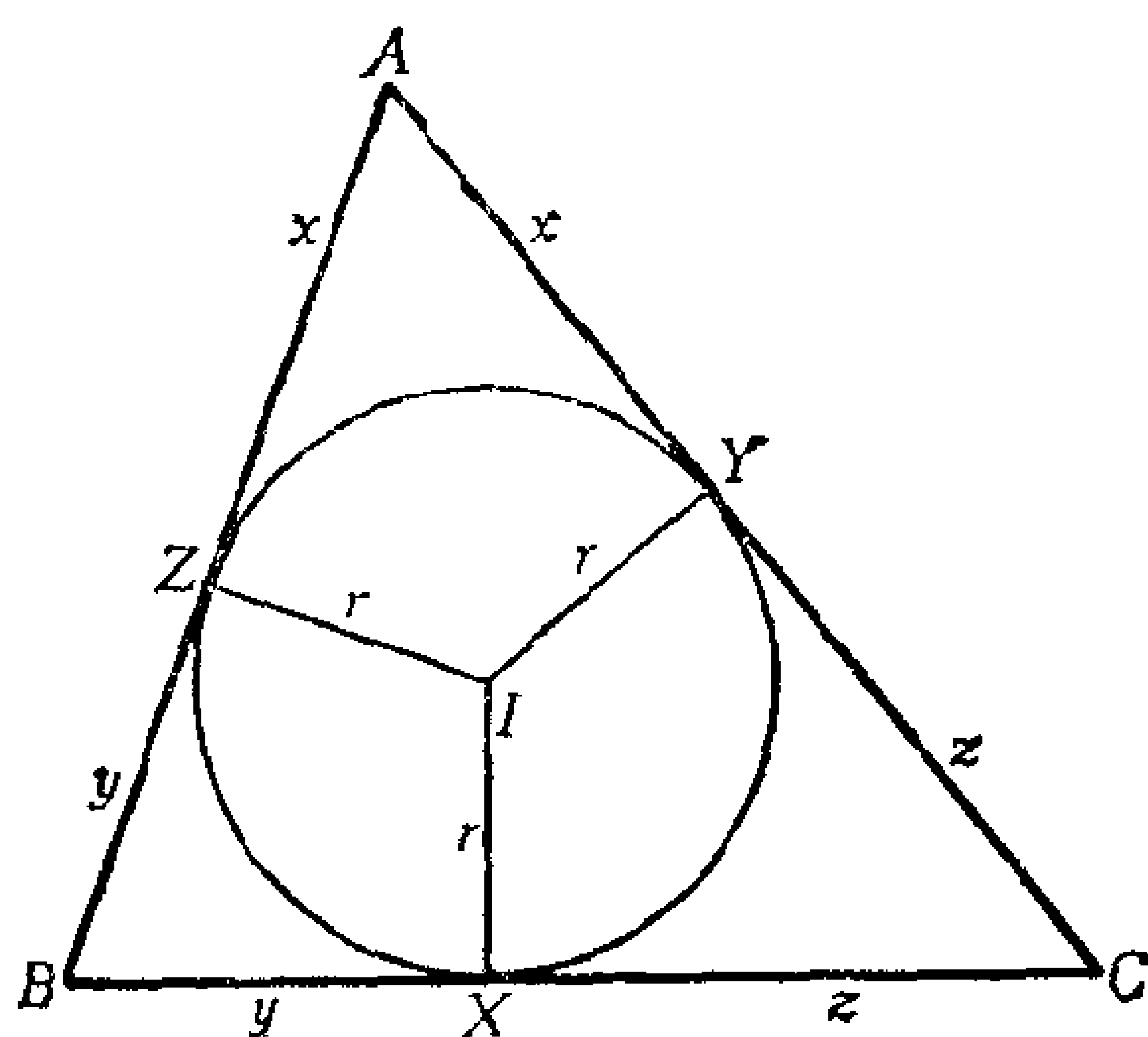


图 1.4A

把这三个方程相加，并采用欧拉的关于半周长的省略记号 s，则有

$$2x+2y+2z=a+b+c=2s,$$

所以
$$x+y+z=s.$$

定理1.4.1 $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$.

因为三角形 IBC 的底是 a，高是 r，它的面积 $(IBC)=ar/2$。把它和 (ICA) 及 (IAB) 的类似的表达式加起来，我们得到 $(a+b+c)r/2=sr$。因此，有

定理1.4.2 $(ABC)=sr$.

图1.4B 画出了以角 A，B，C 的外角平分线为边的三角形 $I_aI_bI_c$。$\angle B$ 的平分线 I_cI_a 上任意一点到 AB 和 BC 是等距的。同理，I_aI_b 上任意一点到 BC 和 CA 是等距的。因此这两条外角平分线的交点 I_a 到三边有相等的距离 r_a。因为 I_a 到 AB, AC 是等距的，所以它必定落在到这两条直线等距的点的轨迹上；这就是说，它必定落在 $\angle A$ 的内角平分线 AI 上。

定理1.4.3 三角形的任意两角的外角平分线和第三角的内角平分线是共点的。

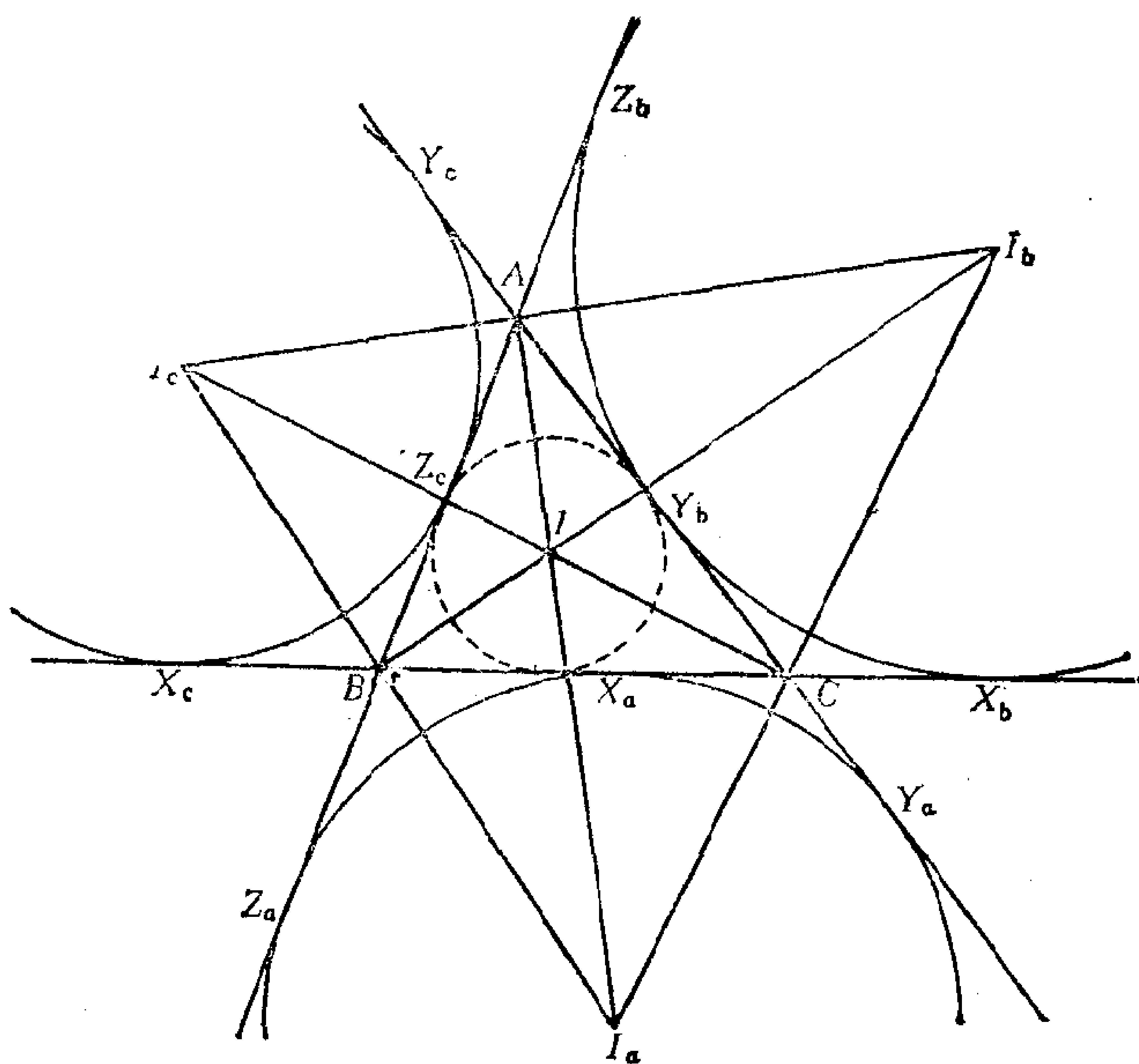


图 1.4B

圆心在 I_a，半径为 r_a 的圆与三角形的三边相切，它是三个傍切圆中的一个。我们把这三个圆的圆心 I_a, I_b, I_c 叫做傍心；把它们的半径 r_a, r_b, r_c 叫做傍切圆半径。每一个傍切圆与三角形的一条边在内部相切，与另外两条边在外部（即它们的延长线上）相切。内切圆和三个傍切圆都和三角形的三条边相切，有时把它们统称为三角形的四个三重相切圆。

如图1.4B 标记切点。因为从圆外一点向圆所作的两条切线长度相等，所以

$$BX_b = BZ_b,$$

$$BX_b+BZ_b=BC+CX_b+Z_bA+AB$$
$$=BC+CY_b+Y_bA+AB$$
$$=a+b+c=2s.$$

这样，从 B 点(或别的顶点)向它的对边外侧的傍切圆所引的切线长是 s. 于是

$$AY_a=AZ_a=BZ_b=BX_b=CX_c=CY_c=s.$$

此外，由于 $cX_b=BX_b-BC=s-a$，所以

$$BX_c=BZ_c=CX_b=CY_b=s-a,$$
$$CY_a=CX_a=AY_c=AZ_c=s-b,$$
$$AZ_b=AY_b=BZ_a=BX_a=s-c.$$

习　题

1. 若以 A,B,C 为圆心的三个圆两两外切，则它们的半径分别是 $s-a,s-b,s-c$。

2. 设 s，r，R 有通常的含义，则 $abc=4srR$.

3. 图1.4A 上的塞瓦线 AX,BY,CZ 是共点的.（它们的公共点称为 $\triangle ABC$ 的久格纳(Gergonne)点。）

4. $\triangle ABC$ 是 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂三角形(图1.4B).

5. $(ABC)=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$(参看定理1.4.2).

6. $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$。

§1.5　斯泰纳-莱默斯定理

许多几何问题似乎具有奇特的魅力，总是在诱惑那些碰到它们而又感到为难的人们. 甚至在古时候，这已成为几何学的特点. 例如，古代的三大著名问题，即倍立方、三等分

角和化圆为方问题，就有这样的魅力。为解决这些问题所作的努力引起了许多数学新分支的发展。直到现在，还有一些自命的数学家在为这三个问题给出“解答”，自然地这会激起读者去指出它的错误。

下面的定理也总是在引起人们的兴趣：

定理1.5.1 有两条内角平分线(从顶点量到与对边的交点)相等的三角形是等腰三角形。

这个问题是1840年在莱默斯(C.L.Lehmus)给斯图姆(C.Sturm)的一封信中提出的，他请求给出一个纯粹的几何学的证明。斯图姆向许多数学家提到了这件事。首先回答这个问题的是瑞士的大几何学家斯泰纳(J.Steiner)，后来该定理就以斯泰纳-莱默斯定理而闻名于世。论述它的文章发表在1842,1844,1848以及从1854到1864的几乎每一年的各种杂志上，在最近一百年间还经常有这方面的文章。

最简单的一个证明用了下面的两个引理。

引理1.5.2 如果圆的两条弦所张的圆周角是两个不等的锐角，则较小角对应的弦较短。

证明 相等的弦在圆心所张的角相等，它们在圆周上适当的点处所张的圆周角(大小等于相应的圆心角的一半)也相等。两个不相等的弦之间，较短者离圆心较远，所张的圆心角也就较小，因此它所张的锐角圆周角较小。

引理1.5.3 若三角形的两个内角不等，则较小角的内角平分线较长[5, p.72]。

证明 设ABC是图1.5A所画的三角形，$B<C$①；设BM和CN平分角B和角C。我们要证明$BM>CN$。在BM

① 从此之后，常用字母B记在B处的角。

上取一点 M'，使$\angle M'CN = B/2$。因为它等于$\angle M'BN$，故 N, B, C, M' 四点落在一个圆上。因为

$$B < \frac{1}{2}(B + C) < \frac{1}{2}(A + B + C),$$

$$\angle CBN < \angle M'CB < 90°.$$

由引理1.5.2，$CN < M'B$，因此 $BM > BM' > CN$。

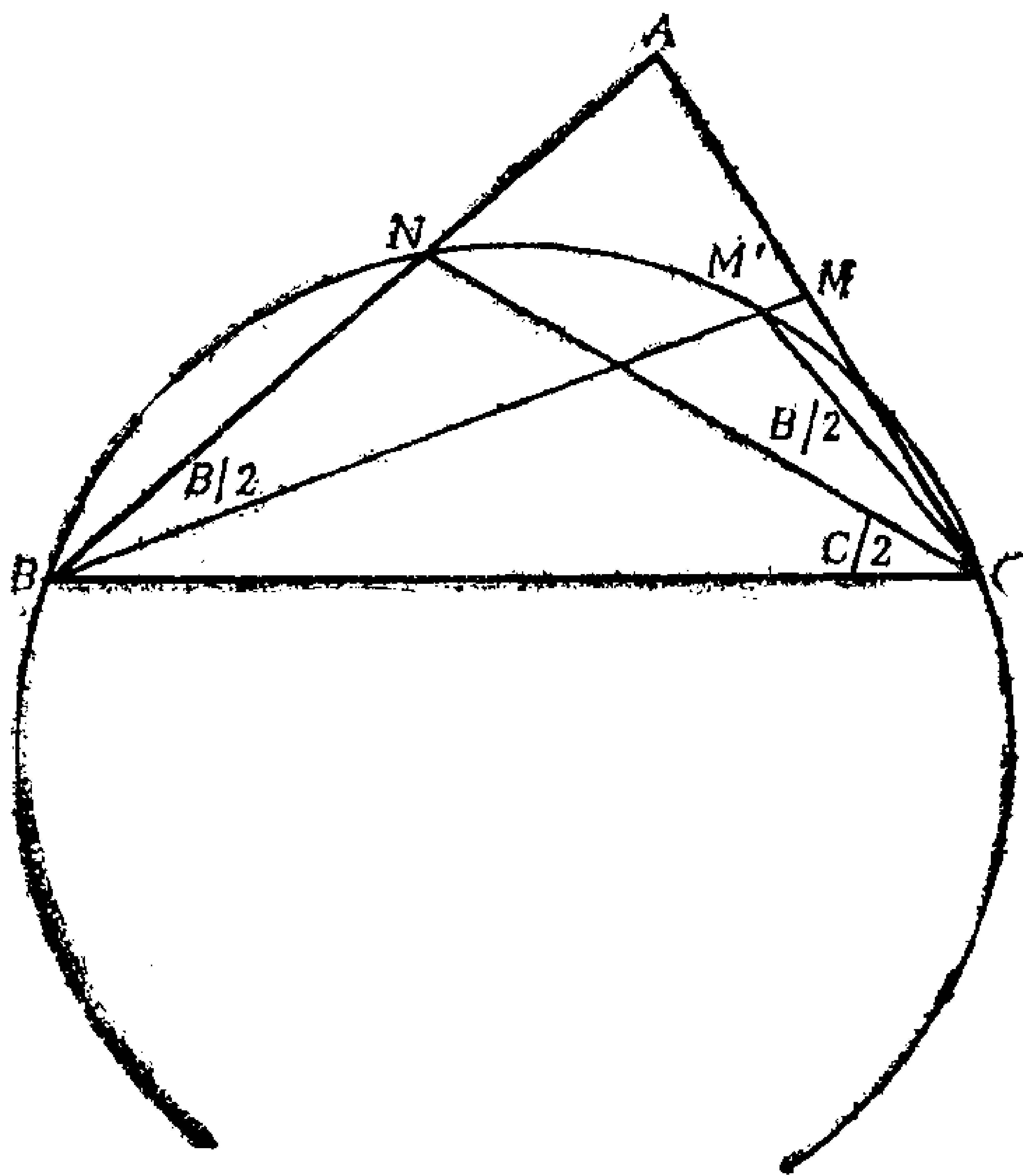


图 1.5A

定理的证明。一个定理常常可以表述成等价的"逆否命题"的形式。例如，"人是要死的"可以说成"不会死的就不是人"。同样，证明定理1.5.1可以换成证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果$B \neq C$，则 $BM \neq CN$。然而，后者恰好是引理 1.5.3的

直接结果。

汉德逊(A.Henderson)为肖伯纳(B.Shaw)① 写过一部传记，还写过一本书名为《在三次曲面上的27条线》② 的论文集。在他的《综观莱默斯-斯泰纳-图克姆问题》③ 一文中，他把与上述证明相仿的一个证明归功于莱默斯本人(1850年)。利用一个强有力的逆否命题来代替原定理的想法出现在坦伯特(V.Thébault)的一篇文章④ 里．他证明了前面的引理1.5.3，然后把定理1.5.1作为引理的"推论"。

汉德逊对莱默斯的证明和斯泰纳的更早的证明似乎不很满意，声称它们都不是"直接的"证明。他宁可假定 $BM=CN$，而不从 $B\neq C$ 出发。然而大多数已发表的证明（例如，见文献[5],p.73)同样是非直接的.尽管有些证明声称是直接的(例如,见文献[6],习题解答,p.2),但是它们的每一个，实际上都是改头换面的非直接证明。要看清楚这一点，只要回想一下只有少数几个最基本的定理才是真正完全地得到证明的，而所有其余的定理都是借助于别的定理得来的。如所周知，定理的"链"最终要追溯到公理。如果其中有一条辅助的定理的证明是非直接的，则不能够真正地称该定理是被直接证明的。现在，一些最简单、最基本的定理已经是非直接地证明的；所以，如果我们要坚持完全的直接性，则我们所拥有的定理只能是十分平庸的了。由此可见，这种看法是十分可悲的，英国的大数学家哈代(G.H.Hardy)有句名言[15, p.34]：

① Bernard Shaw(1856—1950),英国著名的戏剧作家,批评家. ——译者

② 原书名为 The twenty-seven lines upon the cubic surface.

③ 原文名为 The Lehmus-Steiner-Terquem problem in global survey,刊载在 *Scripta Mathematica*,21(1955), pp.223—232,309—312.

④ 刊载在 *Mathesis*, 44(1930), p.97.

"欧几里得所钟爱的归谬法是数学家拥有的最好的武器之一。它比任何一种着棋的弃子法要高明：棋手可能牺牲一卒一子，然而数学家却牺牲掉整盘的棋。"

习　题

1. 设在$\triangle ABC$中，$B=12°$，$C=132°$，BM和CM分别是这两个角的外角平分线，其端点M和N分别在B和C的对边上。试不用三角函数，比较这两条外角平分线的长度(波特默，O. Bottema[①])。

2. 如果把我们关于定理1.5.1的证明用于波特默三角形(显然$B<C$)时，什么地方通不过？

3. 利用§1.3的习题7给出斯泰纳-莱默斯定理的"直接"证明。

§1.6　垂三角形

图1.6A画出了一个锐角三角形ABC及其外心O，垂心H，垂三角形DEF。仔细观察这张图能知道许多东西。我们首先解释用同一个记号α记图中若干角的理由，这里的α是指$90°-A$。如果仿照图1.1A画出$\triangle JBC$，则这个三角形与$\triangle OA'C$是相似的，所以$\angle A'OC=A$。于是，等腰三角形OBC的每一个底角都是$90°-A$。直角三角形ABE和ACF给出相等的$\angle EBA$和$\angle ACF$。因为$\angle BEC$和$\angle BFC$都是直角，所以四边形$BCEF$内接于圆，这也就说明$\angle EBA$和$\angle ACF$相等。同理，利用四边形$BDHF$和$CEHD$便得到

$$\angle HDF=\angle HBF=\angle EBF=\angle ECF=\angle ECH=\angle EDH.$$

---

① 参看A. Henderson, *Scripta Mathematica*, 21(1956), pp. 309—310.

因此HD平分$\angle EDF$。

同理，HE平分$\angle FED$，HF平分$\angle DEF$。因此第一个有趣的结果是：三角形高线平分它的垂三角形的内角。把它叙述成下面的形式，则别有韵味：

定理1.6.1 锐角三角形的垂心是它的垂三角形的内心。

在图1.6A中，我们已经看到$\angle HDF=\angle DBO$。因为HD垂直于DB，故FD必定垂直于OB。同理，DE垂直于OC，EF垂直于OA。

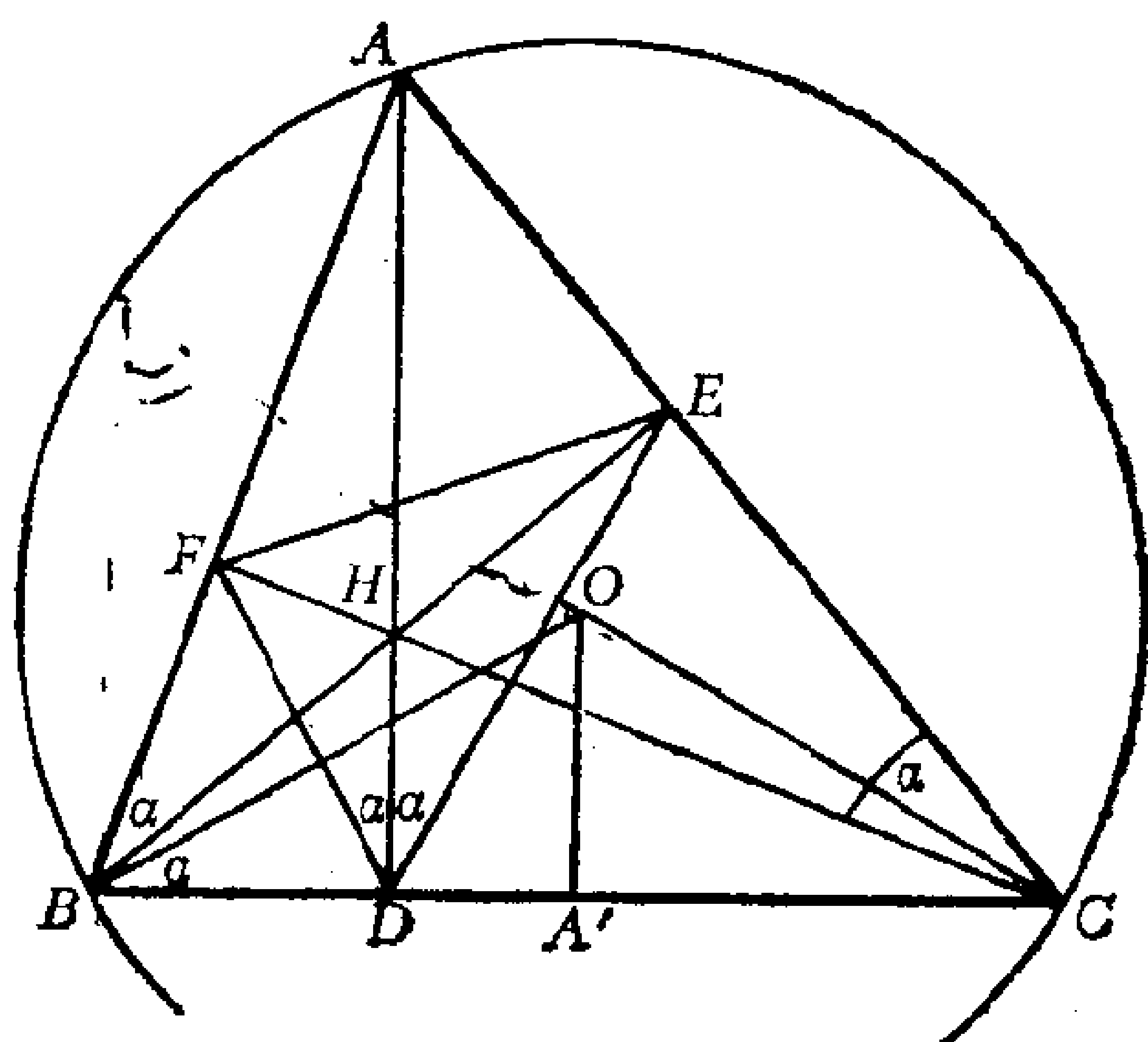


图 1.6A

习　　题

1. $\triangle AEF\sim\triangle DBF\sim\triangle DEC\sim\triangle ABC$（图1.6A）。

2. 设$\angle A$是钝角，重画图1.6A，本节的结论有哪些须作变动？

3. 钝角三角形的垂心是它的垂三角形的一个傍心。

4. $\angle HAO=|B-C|$。

§1.7 中位三角形和欧拉线

三角形的各边中点的联线构成的三角形叫做中位三角形。在图1.7A中，$\triangle A'B'C'$就是$\triangle ABC$的中位三角形。其中，我们已画出两条交于G点的中线，$\triangle ABC$的两条交于H点的高线，以及$\triangle A'B'C'$的两条交于O点的高线。令人

惊异的是，这张图包含着十分丰富的结果。

首先，$\triangle A'B'C'$的边分别平行于$\triangle ABC$的边，所以这两个三角形是相似的。又 $C'B' = BC/2$，所以任意两条对应的线段（不仅是对应的边）之比是1:2。事实上，线段$B'C'$，$C'A'$，$A'B'$把$\triangle ABC$分割成四个全等的三角形。

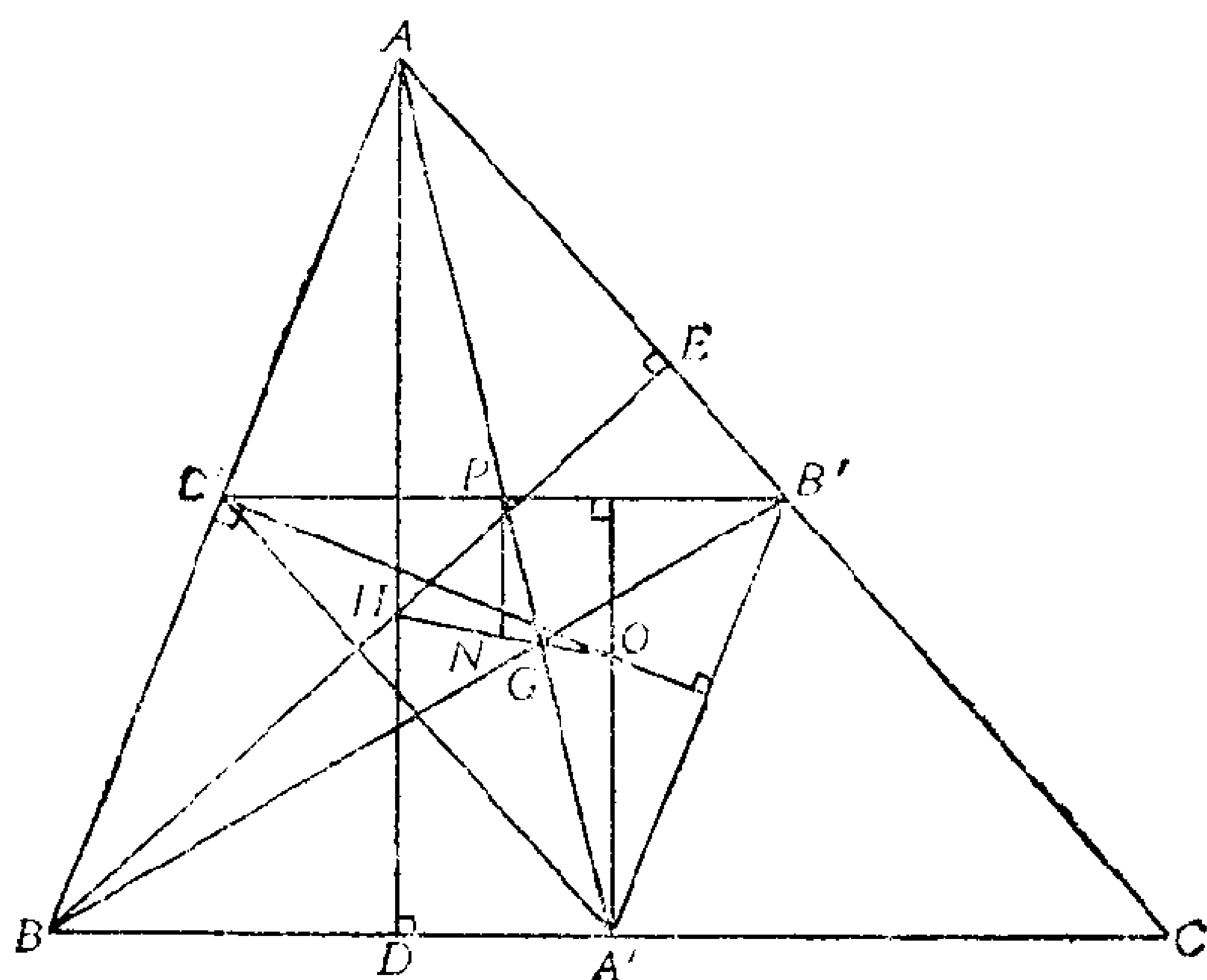


图 1.7A

其次，我们看到$AC'A'B'$是平行四边形，所以AA'平分$B'C'$。因此，$\triangle A'B'C'$的中线落在$\triangle ABC$的中线上，于是这两个三角形有公共的重心G。同时，$B'C'$的中点P也是AA'的中点。

现在，我们画出的$\triangle A'B'C'$的两条高线正好是$\triangle ABC$的边AB和BC的垂直平分线。因此，$\triangle A'B'C'$的垂心O同时是$\triangle ABC$的外心。

因为H是$\triangle ABC$的垂心，而O是相似的$\triangle A'B'C'$的垂心，所以$AH = 2OA'$。根据定理1.3.2可知$AG = 2GA'$。最

后，因为 AD 和 OA' 都垂直于边 BC，故它们是平行的。因此

$$\angle HAG=\angle OA'G,\quad \triangle HAG\sim\triangle OA'G,$$

并且

$$\angle AGH=\angle A'GO.$$

这就是说 O,G,H 三点是共线的，并且 $HG=2GO$：

定理1.7.1 任意一个三角形的垂心、重心和外心共线。并且重心把垂心和外心的连线分成2:1的比。

这三点所在的直线叫做三角形的欧拉线。

让我们更加细致地研究图1.7A。我们已标出欧拉线 HO 和 $B'C'$ 在点 P 的垂线的交点 N。$AH,PN,A'O$ 这三条线都垂直于 $B'C'$，因此它们是互相平行的。因为 $AP=PA'$，于是它们的间隔也是相同的：PN 上的点到平行线 AH 和 $A'O$ 的距离相等。因此 N 是线段 HO 的中点。

我们已围绕 $\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C'$ 进行了讨论。如果把同样的推理用于另外两条边，那末线段 HO 是保持不动的，而它被这两条边的垂直平分线所平分。因为 HO 的中点是唯一的，所以 $\triangle A'B'C'$ 的三条边的垂直平分线都经过点 N。换句话说，N 必是 $\triangle A'B'C'$ 的外心。

总起来说，中位三角形的外心是原三角形的欧拉线上的线段 HO 的中点。又因为 $\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$，故中位三角形的外接圆半径等于原三角形的外接圆半径的一半。

欧拉的名字频繁地出现在数学的许多领域中，我们要对欧拉作一番介绍。欧拉(L.Euler)在1707年生于瑞士的巴塞尔。1727年，他被邀请到俄国彼得堡科学院工作。1741年，他到柏林取得了普鲁士科学院数学教授的席位。1766年，他回到彼得堡，并且留在那里工作直到1783年逝世。

欧拉是位孜孜不倦的工作者．他的活动丰富了数学的每一个领域．无论在哪里，都会见到欧拉定理，欧拉公式，或者欧拉方法．欧拉写的论文有473篇是在他生前发表的，200篇是在他死后不久发表的，共余61篇发表得较晚．此外，他是在极其困难的条件下完成这些工作的，因为在1735年他有一只眼睛失明，而在1766年他的另一只眼睛也失明了．他的计算技能是十分惊人的，他对数学的直觉是非常了不起的．在这本书里，我们还要一再提到欧拉的名字．

习　题

1．按照用图1.1B替代图1.1A的方式，重新画出图1.7A，在$\triangle ABC$是钝角三角形的情形，检验定理1.7.1的证明仍旧有效．

2．$OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$．

3．$DA' = |b^2 - c^2|/2a$．

4．如果$\triangle ABC$的欧拉线平行于边BC，则

$$\tan B \cdot \tan C = 3.$$

§1.8　九点圆

为叙述方便起见，我们在图1.7A中先去掉几条线，再添上几条线，结果得到图1.8A，其中K, L, M是三条高线上的线段AH, BH, CH的中点．让我们来看一看从这张图可以得到什么样的结论．因此BC是两个三角形ABC和HBC的公共边，它们的其余两边分别被C', B'和L, M平分，所以线段$C'B'$和LM同时平行于BC(并且长度等于BC的一半)．同理，因为AH是三角形BAH和CAH的公共边，线段$C'L$和$B'M$同时平行于AH(并且长度等于AH

的一半)，于是 $B'C'LM$ 是平行四边形。由于 BC 和 AH 是互相垂直的，所以这个平行四边形实际上是矩形。同理，$A'B'KL$(及 $C'A'MK$)也是矩形。因此 $A'K, B'L, C'M$ 是同一个圆的三条直径，如图 1.8 B 所示。

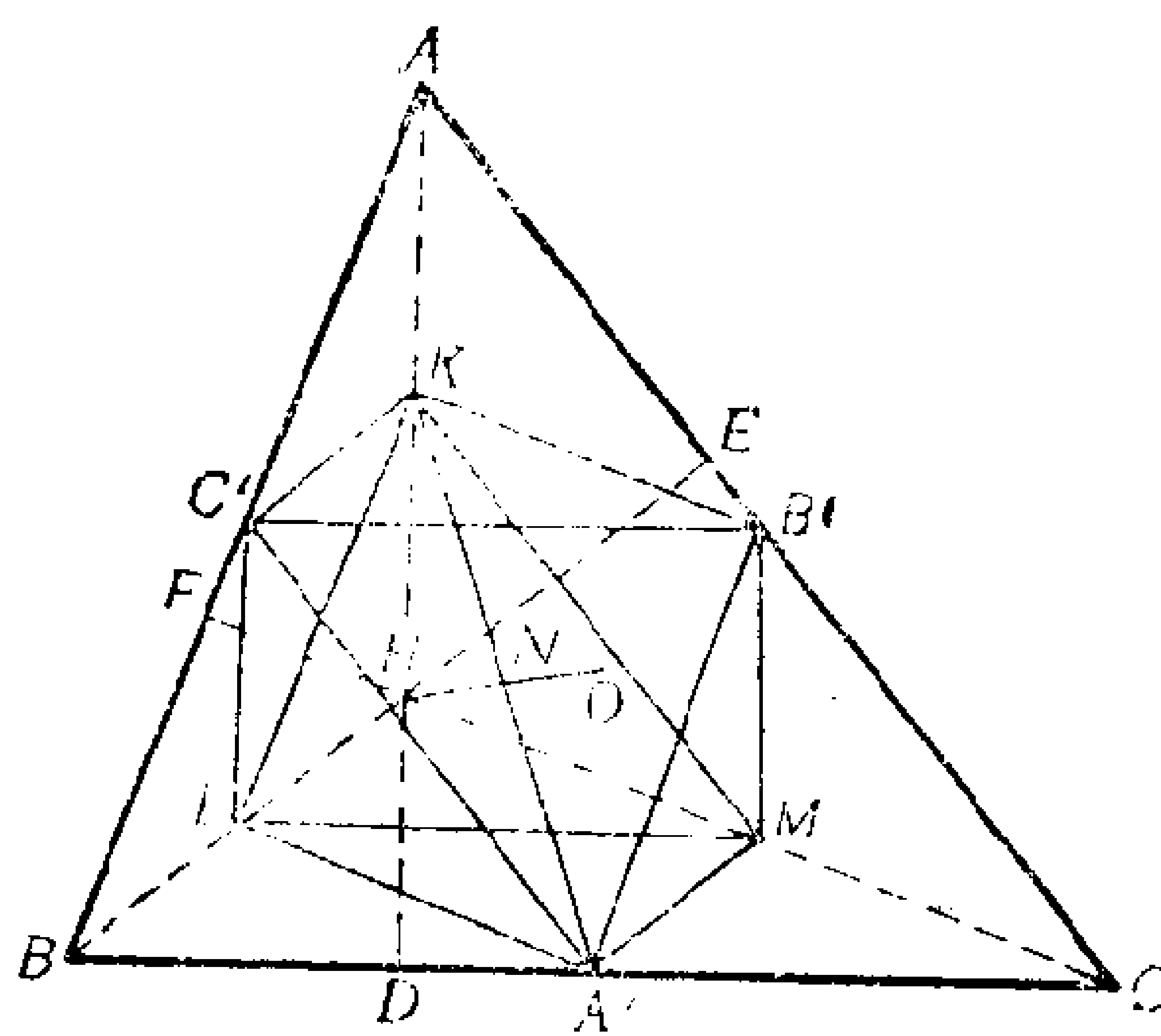


图 1.8A

因为 $\angle A'DK$ 是直角，这个圆(以 $A'K$ 为直径)经过 D 点。同理，点 E 和 F 也都在这个圆上。总之，我们有

定理1.8.1. 任意一个三角形的三条高线的垂足，三条边的中点，以及从顶点到垂心的三条连线的中点，都落在半径为 $R/2$ 的一个圆上。

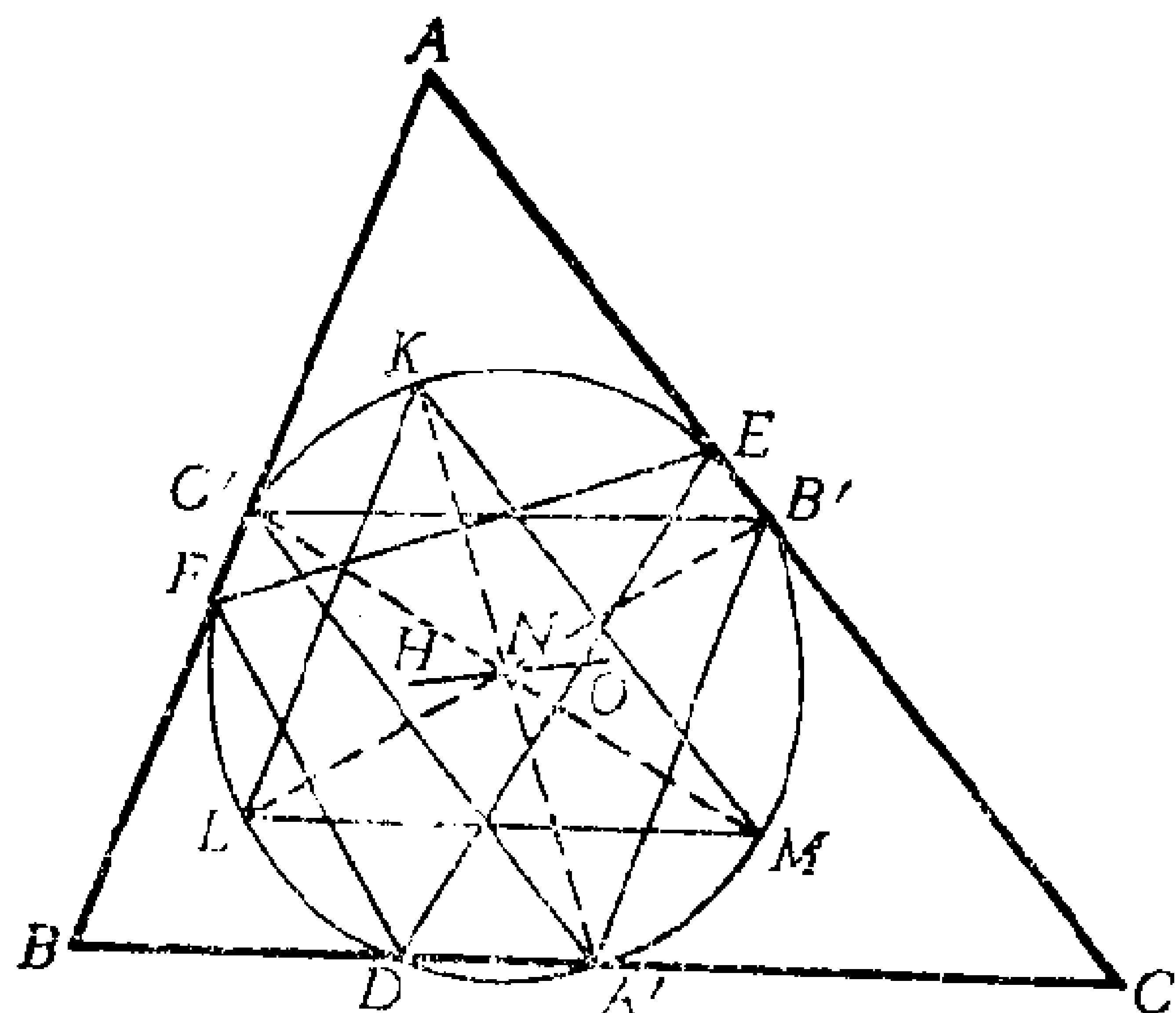


图 1.8B

按照庞赛列(J. V. Poncelet)的命名，该圆叫做三角形的九点圆。因为三点 K, L, M 分别是 A', B', C' 的对径点，所以三角形 KLM 和三角形 $A'B'C'$ 可彼此从对方绕圆心旋转180°得到。显然，旋转180°

使这两个全等三角形的位置互换，同时也使它们的垂心H和O互换。因此，九点圆的圆心是HO的中点(已记作N)。换句话说，我们有

定理1.8.2 九点圆圆心在三角形的欧拉线上，并且它到垂心和外心的距离相等。

这两个定理的历史有点搞不清楚。贝文(B.Bevan)于1804年在一本英国杂志上提出过一个问题，似乎表明这两个定理已经知道了。欧拉早在1765年证明了“垂三角形和中位三角形有同一个外接圆”，所以有时人们错误地把上面两个定理归功于欧拉。直到现在，大陆[①]的著作者还常常把九点圆称为“欧拉圆”。第一个完整的证明是庞赛列(Poncelet)在1821年发表的。再后来，费尔巴哈(K.Feuerbach)重新发现了欧拉的部分结果，还添进了更多的出人意料的性质，以至于许多著作者把九点圆叫做“费尔巴哈圆”。费尔巴哈定理说：九点圆和四个三重相切圆都相切(我们在§5.6将要证明这个定理)。

习　题

1. 四边形$AKA'O$(图1.8A)是平行四边形。

2. 在九点圆(图1.8B)中，点K，L，M分别平分弧EF，FD，DE。

3. $\triangle ABC$的外接圆是$\triangle I_aI_bI_c$的九点圆。

4. 设三个全等的圆经过一个公共点，又两两相交成三点A，B，C。则这三个已知圆的共同的半径等于$\triangle ABC$的外接圆半径，并且这三个圆的公共点是$\triangle ABC$的垂心。

---

① 指欧洲大陆各国。——译者

5. 九点圆在三角形各边上截出的线段所对的圆周角是 $|B-C|$, $|C-A|$, $|A-B|$。

§1.9 垂足三角形

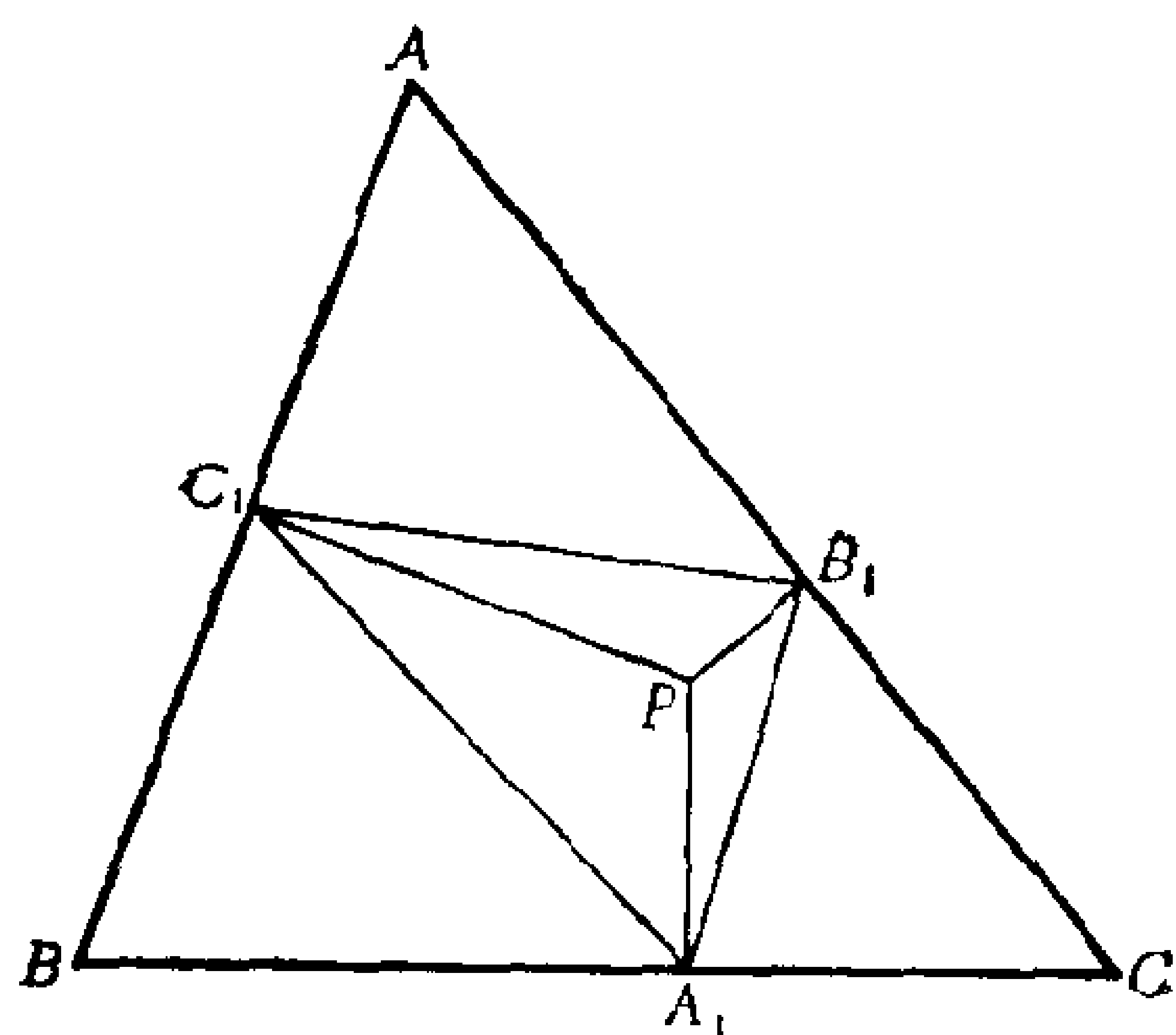


图 1.9A

垂三角形和中位三角形是一类更普遍的伴随三角形的两个特例。如图1.9A，设 P 是已知三角形 ABC 的任意一个内点，从该点向 BC, CA, AB 引垂线 PA_1, PB_1, PC_1。以它们的垂足为顶点的三角形 $A_1B_1C_1$ 称为 $\triangle ABC$ 关于“垂点” P 的垂足三角形。关于 P 是内点的限制可以换成 P 不落在 $\triangle ABC$ 的外接圆上（加上后一条件的理由见§2.5的说明）。显然，当 P 是垂心或外心时，我们分别得到垂三角形和中位三角形。

让我们仔细地考察图1.9A。因为在 B_1, C_1 两处是直角，故这两点落在以 AP 为直径的圆周上；换言之，P 在 $\triangle AB_1C_1$ 的外接圆上。把正弦定律用于 $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle ABC$ 则得

$$\frac{B_1C_1}{\sin A}=AP,\quad \frac{a}{\sin A}=2R,$$

因而

$$B_1C_1=a\cdot\frac{AP}{2R}.$$

同理，

$$C_1A_1 = b \cdot \frac{BP}{2R}, \quad A_1B_1 = C \cdot \frac{CP}{2R}.$$

于是我们证明了

定理1.9.1 若设垂点到△ABC的各顶点的距离是x，y，z，则垂足三角形的边长分别是

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R}.$$

自然，$x=y=z=R$是我们所熟悉的情形。

考虑垂足三角形的垂足三角形是一个有趣的问题，同时也是几何学中令人爱不释手的、富有想象力的例子。它首次问世大约是在1892年，编者纽伯格(J. Neuberg)把它增补到凯瑟(J. Casey)的名著《欧几里得原本前六卷续篇》① 的第六版。在图1.9B中内点P已用来决定△ABC的(第一个)垂足三角形△$A_1B_1C_1$。点P又可以用来决定△$A_1B_1C_1$的垂足三角形△$A_2B_2C_2$，我们自然把它称为△ABC的"第二个垂足三角形"。第三次产生了△$A_2B_2C_2$的垂足三角形△$A_3B_3C_3$。这"第三个垂足三角形"用到了同一个垂点P。采用这种术语，纽伯格的发现可以说成：

定理1.9.2 第三个垂足三角形与原三角形是相似的。

证明简单得出奇。只要把P和A联结起来，则图形本身实际上已给出了证明。因为P同时在三角形AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$和$A_3B_2C_3$的外接圆上，于是我们有

$$\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P$$
$$= \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$$

及

---

① 原书名为：A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid.

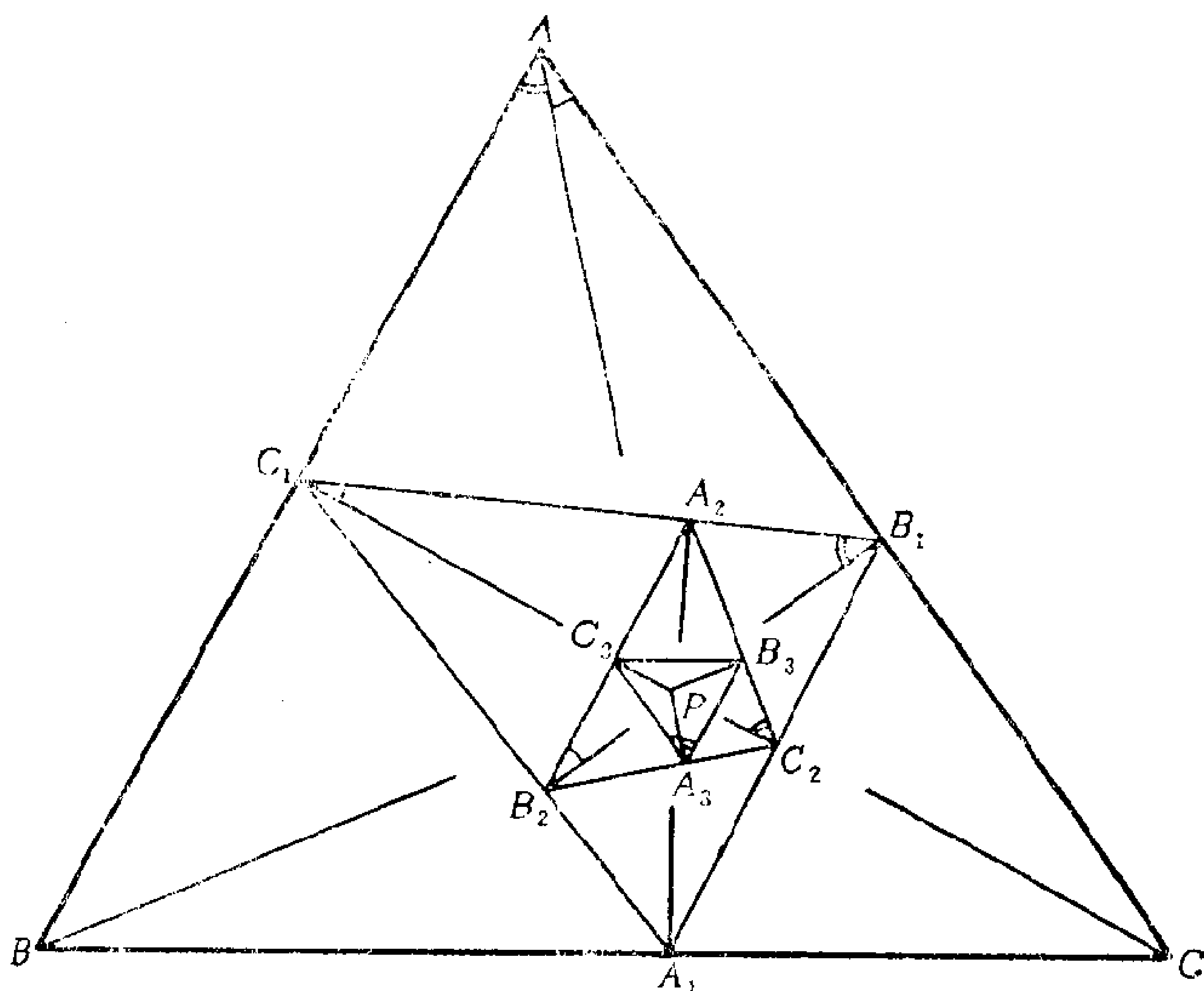


图 1.9B

$$\angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 = \angle PC_1A_2 = \angle PB_2A_2$$
$$= \angle PB_2C_3 = \angle PA_3C_3.$$

换言之，AP把$\angle A$分成两个角(在图中分别用单圆弧和双圆弧标记)，它们分别等于在B_1和C_1的对应角，又等于在C_2和B_2的对应角，最后又都等于在A_3的对应角。因此$\triangle ABC$和$\triangle A_3B_3C_3$在A和A_3的角相等。同理，这两个三角形在B和B_3的角也相等，这就证明了定理。

有趣的是，在图上看到了从位置A到位置A_3的“角的阅兵式”：它象有素养的队列操演那样干净利索。

上述性质由斯蒂瓦特(B.M.Stewart)作了推广①. 他发

① 参看 *Am.Math.Monthly*,vol.47,Aug.-Sept.(1940), pp.462—466.

现任意 n 边形的第 n 个垂足 n 边形与原 n 边形同样是相似的。试做一下关于四边形的第四个垂足四边形的证明是颇为有益的。

我们的研究到此暂时告一段落。我们已经完成了原计划要做的事情：从熟知的事实出发，讨论了几个简单的、然而是有意思的事实。有许多问题可以用这里所叙述的方法来解。其中有些可能是读者曾经见过的众所周知的难题。下面我们提出五个耐人寻味的问题以结束这一章。

习　题

1. 如果等边三角形 ABC 的塞瓦线 AQ 延长并与外接圆交于点 P，则

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}.$$

2. 如图1.9C，在正方形 $ABCD$ 内画一个等腰三角形 PAB，使它在底边 AB 上的两个底角是 $15°$，则 P,C,D 是一个等边三角形的顶点。

3. 若在平行四边形 $ABCD$ 外面作两条直线 PB 和 PD，分别与边 BC 和 DC 成相等的角，如图1.9D，则

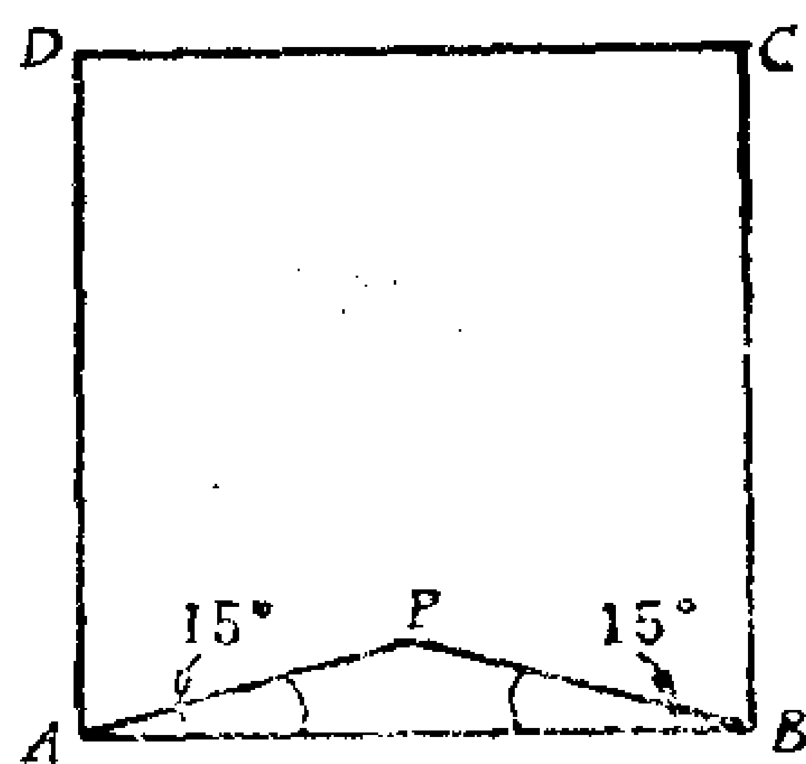


图 1.9C

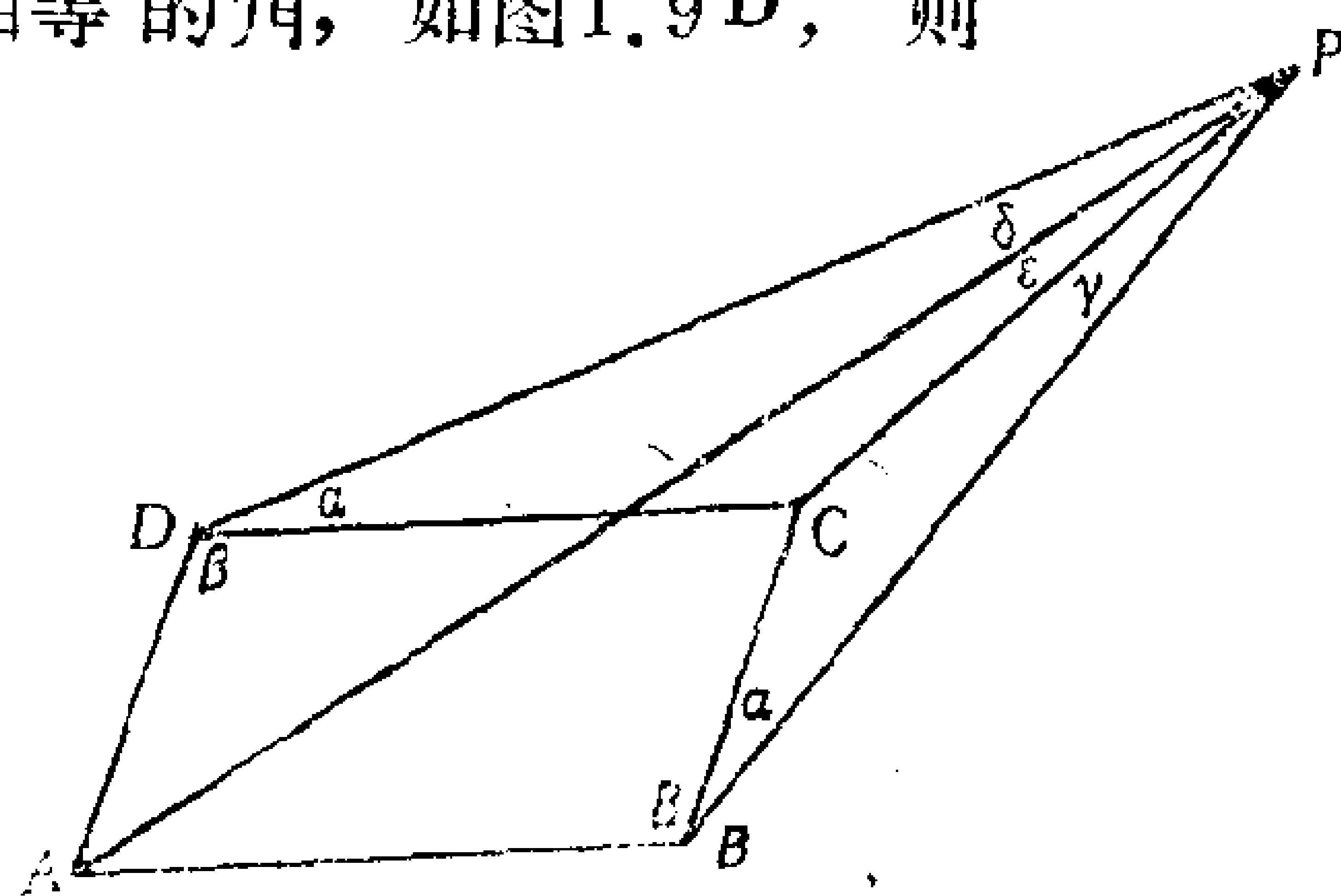


图 1.9D

$$\angle CPB = \angle DPA.$$

（自然这是平面图形，不是立体图形！）

4. 设$\triangle ABC$是等腰三角形，$\angle B$和$\angle C$都是$80°$.塞瓦线BD和CE把$\angle B$和$\angle C$分成

$60° + 20°$ 及 $30° + 50°$，

如图1.9E。求$\angle EDB$.

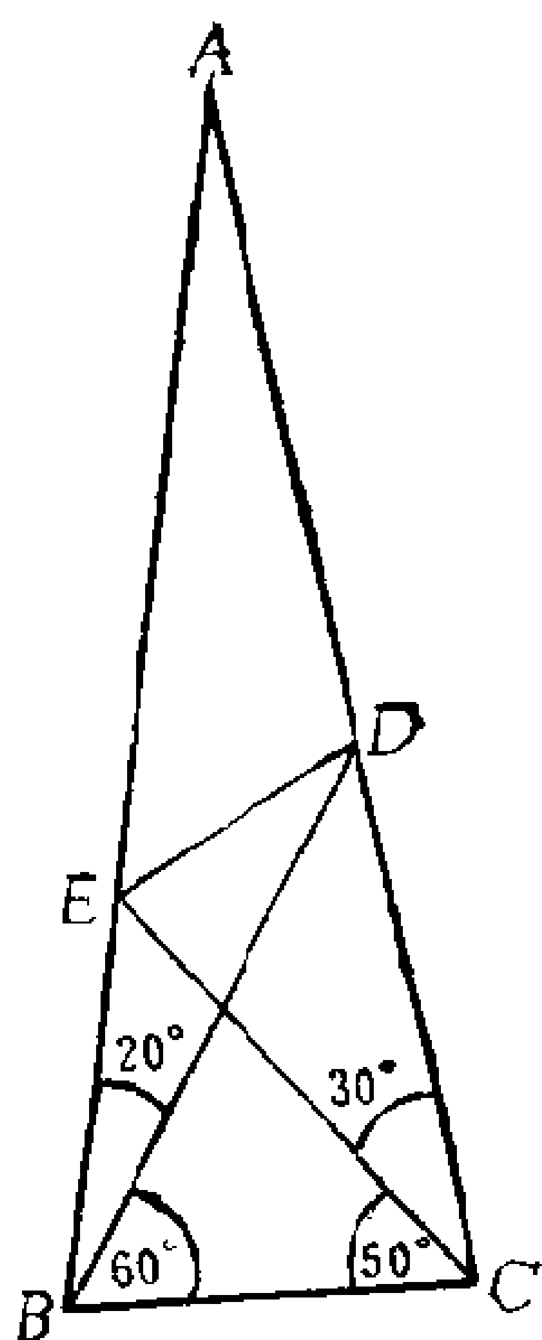


图 1.9E

5. 如果过等边三角形的一个顶点作两条直线，把在对边上向外画的半圆分成三段等弧，则这两条直线也把对边分成三条相等的线段。

第二章　圆的若干性质

尽管希腊人在几何学方面，而且在数学的多种领域里获得了丰硕的成果，然而我们今天已处处超过了他们，在几何学方面肯定也是如此.

F·克莱茵

圆一直受到最大的关注. 它的完美无缺的形状还影响了哲学家和天文学家. 在开普勒(Kepler)总结出他的定律之前，认为行星会沿着不是圆形的轨道运动简直是不可思议的. 现在，"方形"、"直线"等字眼的含义有时会变动，但是圆的含义却始终如一. 如果排除掉迷信和伪科学的成分，则圆依旧象以往那样引人注目.

由于篇幅的限制，我们只能叙述圆本身的自欧几里得时代发展而来的几个最有意思的性质，以及它和三角形、其它多角形的关系.

§2.1　点关于圆的幂

我们从回顾欧几里得原本中的两个定理着手：Ⅲ.35，关于圆的两条弦彼此分成两部分的积(用图2.1A的记号，即 $PA\times PA'=PB\times PB'$)；Ⅲ.36，把圆外一点 P 向圆引的割线和切线相比较(用图2.1B的记号，则 $PA\times PA'=PT^2$). 如果我们把切线看作割线的极限，则这两个结果合起来就是：

定理2.1.1　如果经过 P 点的两条直线分别与圆交于 A，A'(可能合而为一)和 B，B'(也可能合而为一)，则

$$PA \times PA' = PB \times PB'.$$

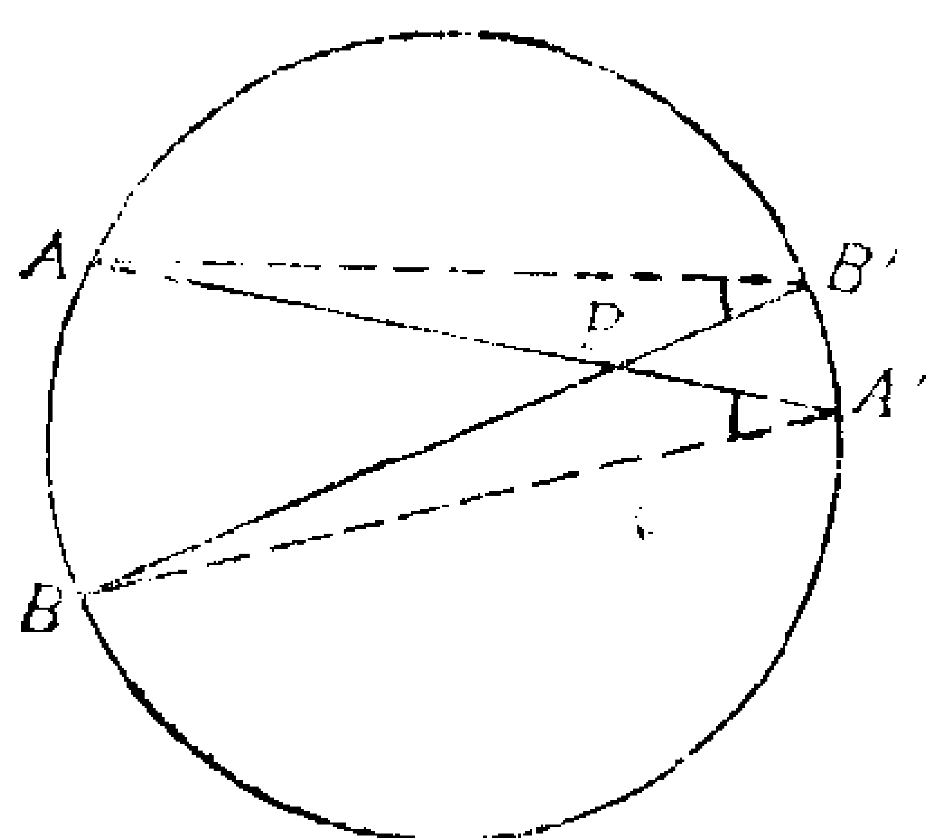


图 2.1A

为证明这个定理，我们注意到：从相似三角形 PAB' 和 PBA'（它们在 P 处的角相等）得到

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PB}{PA'}.$$

在图2.1B中，我们从相似三角形 PAT 和 PTA' 同样能得到

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'},$$

因此 $PA \times PA' = PT^2 = PB \times PB'$.

设 R 是圆的半径，d 是从 P 到圆心的距离。取圆的直径 BB'，使它所在直线经过 P 点（假定 B 到 P 的距离比 B' 到 P 的距离远），当 P 在圆内时（如图2.1A），则有

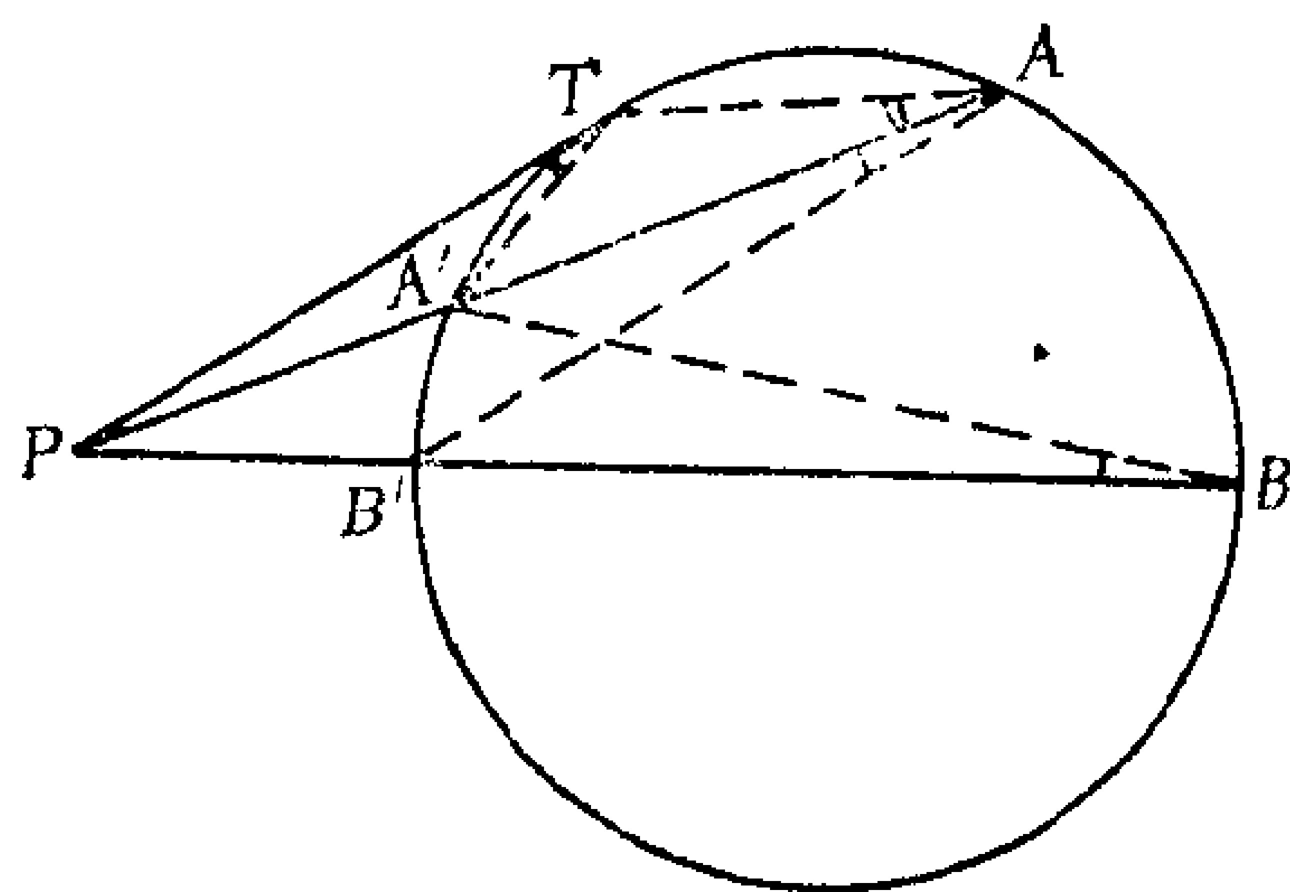


图 2.1B

$$AP \times PA'$$
$$= BP \times PB' = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2;$$

当 P 在圆外时（如图2.1B），则有

$$PA \times PA' = PB \times PB' = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2.$$

方程

$$AP \times PA' = R^2 - d^2$$

可用来简捷地证明属于欧拉的一个公式.

定理2.1.2 设 O 和 I 分别是三角形的外心和内心，外接圆半径是 R，内切圆半径是 r；设 d 是距离 OI，则

$$d^2 = R^2 - 2rR. \quad (2.1.2)$$

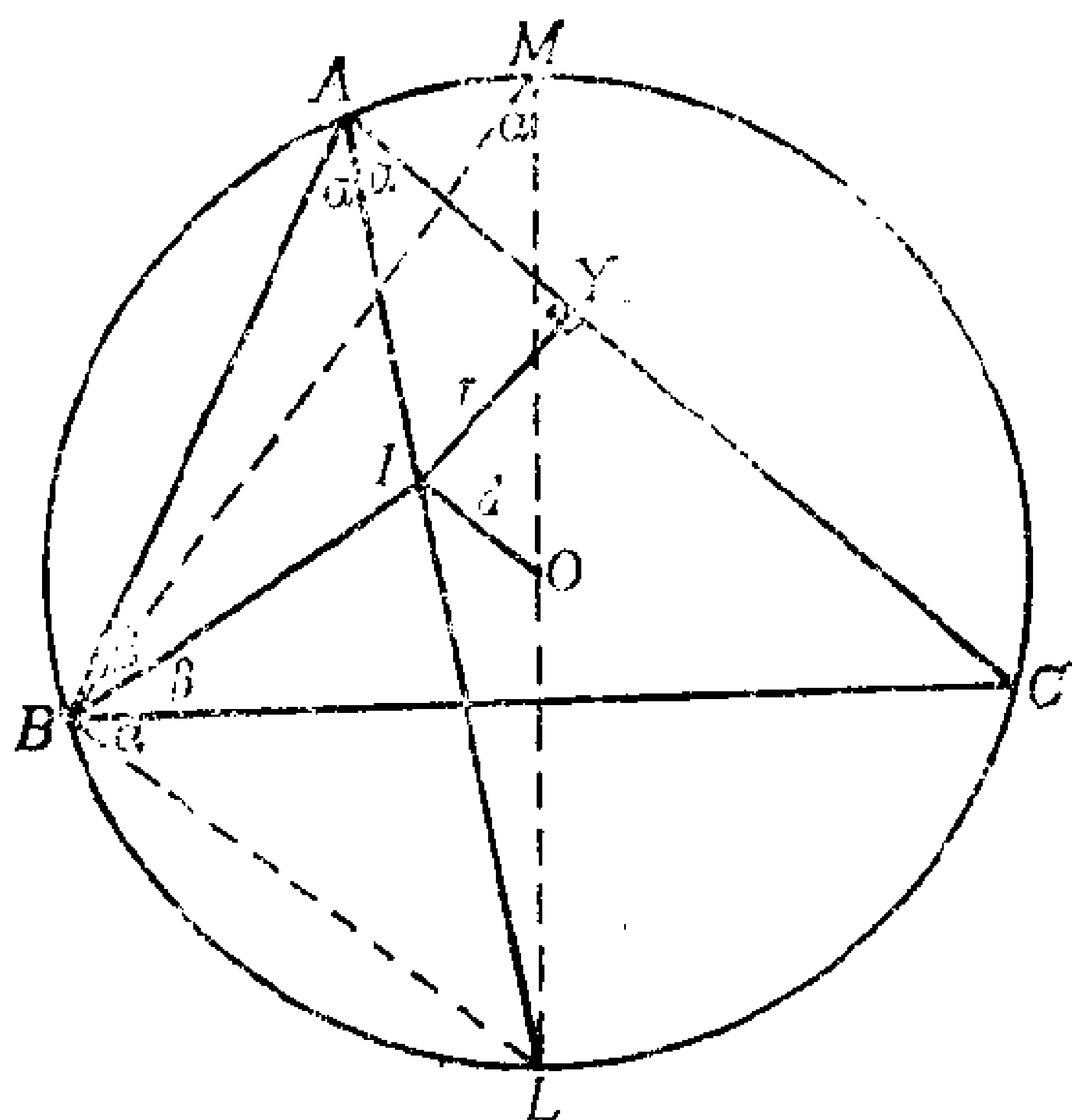


图 2.1C

图2.1C 画出了 $\angle A$ 的内角平分线的延长线与外接圆的交点 L，它是不含有 A 点的 BC 弧的中点. 设 LM 是与 BC 垂直的直径. 为方便起见，记 $\alpha = A/2, \beta = B/2$，则

$$\angle BML = \angle BAL = \alpha, \quad \angle LBC = \angle LAC = \alpha.$$

因为 $\triangle ABI$ 在 I 的外角是

$$\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI,$$

故 $\triangle LBI$ 是等腰三角形：$LI = LB$. 这样，

$$R^2 - d^2 = LI \times IA = LB \times IA$$

$$= LM \cdot \frac{LB/LM}{IY/IA} \cdot IY = LM \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot IY$$

$$= LM \cdot IY = 2Rr,$$

即 $d^2 = R^2 - 2Rr$，这就是我们所要证明的公式.

对于任意一个半径为 R 的圆及距离圆心为 d 的点 P，我们把

$$d^2 - R^2$$

称为点P关于该圆的幂。当P在圆外时，幂取正值；当P在圆内时，幂取负值；而P在圆上时，幂为零。在第一种情形，我们已把幂表成

$$PA \times PA',$$

其中A，A'是圆上和P点共线的任意两点（如定理2.1.1所述）。如果我们采用牛顿(Newton)的有向线段的概念，即把直线上的有向线段看作一维向量代数的元素，使得

$$AP = -PA,$$

则对于任意位置的P点，前面给出的P的幂的表达式仍然是对的。在一条直线上，两条有向线段的积（或商）看作是正的还是负的，由它们的指向是否一致而定。在这样的约定下，方程

$$d^2 - R^2 = PA \times PA'$$

总是成立的。当P在圆内时，则

$$d^2 - R^2 = -(R^2 - d^2) = -AP \times PA' = PA \times PA';$$

当P在圆上时，则A和A'中必有一点与P重合，因此有一条线段长度为零。实际上，当我们看到对于经过P点的所有割线（或弦），乘积$PA \times PA'$都取同一个值时，就能用这个值作为点P关于圆的幂的定义了。

"幂"这个词是斯泰纳首先用于这种意义的。斯泰纳的名字在第一章已经提到过。

习　题

1. 点关于半径为R的圆的幂（在代数意义下的）最小值是多少？哪一点的幂取到这个最小值？

2. 关于已知圆取常数值幂($> -R^2$)的点的轨迹是什么？

3. 若一点关于圆的幂是t^2，试从几何上解释长度t。

4.设 PT 和 PU 是从 P 向两个同心圆所作的切线，切点 T 在小圆上。若线段 PT 与大圆相交于 Q，则 $PT^2-PU^2=QT^2$。

5.三角形外接圆半径至少是它的内切圆半径的两倍。

6.用 r 和 R 表示内心关于外接圆的幂。

7.采用有向线段的记法，斯蒂瓦特定理(§1.2，习题4)可以叙述成如下对称的形式[5, P.152]：若 P, A, B, C 是任意四点，其中后三点是共线的，则

$$PA^2\times BC+PB^2\times CA+PC^2\times AB+BC\times CA\times AB=0.$$

8.设经过$\triangle ABC$ 的重心的直线与各边相交于 X, Y, Z 三点，利用有向线段的概念证明

$$\frac{1}{GX}+\frac{1}{GY}+\frac{1}{GZ}=0.$$

9.从一英里①高的山顶眺望，则地平线有多远?(假定地球是直径为7920英里的球体。)

§2.2 两个圆的根轴

贝尔讲过下面一件轶事[3, P.48]．年轻的波希米亚的流亡公主伊莉莎白曾经用坐标法成功地解决了初等几何的一个问题。正如贝尔所讲的那样，“这是与初等的笛卡儿几何的粗鲁的暴力不相称的那类问题的一个典型”．她的老师笛卡儿②(R.Descartes)的反应是“在一个月的时间内都不愿意看她的解答…”．

---

① 1英里＝1.609公里。——译者

② 笛卡儿坐标就是取自他的名字。但是有人主张，实际上发明解析几何的是费马(P.Fermat，1601—1665)。他们的论点是：费马在给笛卡儿的一封信里给出了解析几何的主要观念。

教训是明显的：用某种方法能够得到的解答很可能不是最好的和最简单的。但是，不管怎么说，这里有一个定理，它的解析证明不会比通常的综合法证明更困难，而且能引起一系列有趣的反响。

定理2.2.1 关于两个非同心圆的幂相等的点的轨迹是垂直于这两个圆的连心线的直线。

采用笛卡儿坐标，任意两点(x,y)和(a,b)之间的距离平方是

$$(x-a)^2+(y-b)^2.$$

因此(x,y)关于圆心为(a,b)，半径为r的圆的幂是

$$d^2-r^2=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2.$$

特别，该圆本身是幂为零的点(x,y)的轨迹，其方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \qquad (2.2.2)$$

把上面的方程写成$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，说明该圆是到点(a,b)的距离为常数r的点的轨迹。

把圆的方程进一步写成

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \qquad (2.2.3)$$

时（其中$c=a^2+b^2-r^2$），点(x,y)的幂还是方程的左端，即

$$x^2+y^2-2ax-2by+c.$$

圆心在同一个点(a,b)，而半径不同的任意一个圆有同一形状的方程，只是c的值有所不同。而任意一个不同心的圆的方程可以写作

$$x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0, \qquad (2.2.4)$$

其中或者$a'\neq a$，或者$b'\neq b$，或者两者同时发生。这样，对于定理2.2.1中所说的两个非同心圆，不妨假设它们的方程是(2.2.3)和(2.2.4)。关于这两个圆的幂相等的点(x,y)的轨迹是

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'.$$

消去 x^2+y^2，则这条轨迹是直线

$$(a'-a)x+(b'-b)y=\frac{1}{2}(c'-c).$$

选取适当的参考系，使 x 轴通过这两个圆的圆心，于是这两个圆的方程成为较简单的形式

$$x^2+y^2-2ax+c=0, \qquad x^2+y^2-2a'x+c'=0, \quad (2.2.5)$$

其中 $a'\neq a$。所求轨迹就是

$$x=\frac{c'-c}{2(a'-a)}.$$

这条直线平行于 y 轴，垂直于联结圆心的 x 轴。因为这条直线能够在几何上用圆来确定(因为它包含了所有等幂的点)，于是可以把它取作 y 轴，如图2.2A。这样，两个非同心的圆可以表成更简单的形式

$$x^2+y^2-2ax+c=0, \qquad x^2+y^2-2a'x+c=0, \quad (2.2.6)$$

所求的轨迹恰好是 $x=0$。反过来，直线 $x=0$上的点$(0,y)$关

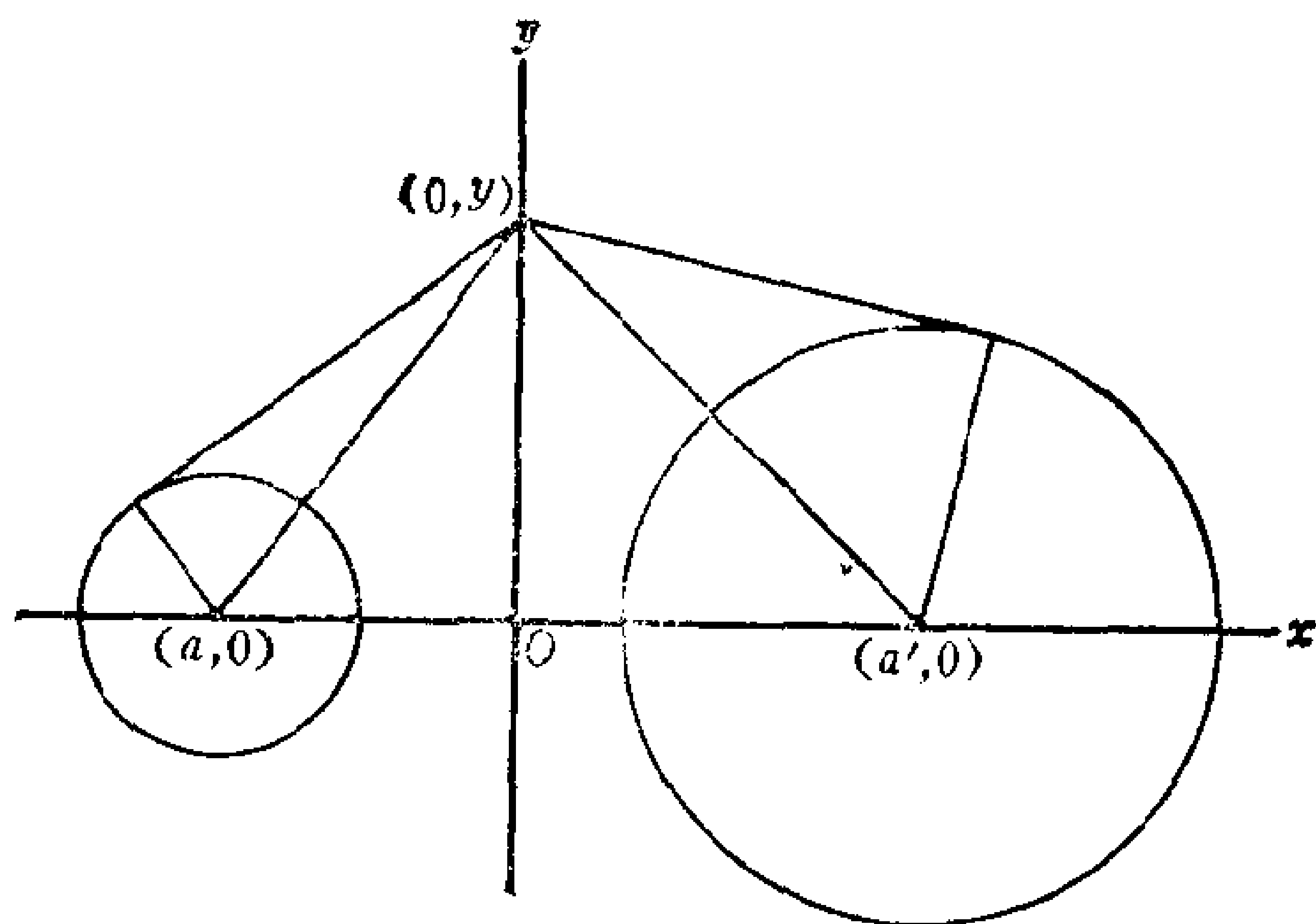


图 2.2A

于这两个圆的幂都是y^2+c。

上面的讨论完成了定理的证明。自然，如果我们把两个圆直接表成(2.2.5)，则证明可以缩短。但是，这样一来，我们就丢掉了一个漂亮的引理：对于表成标准形式(2.2.3)的任意一个圆，一般位置点(x,y)的幂等于该圆方程的左端表达式。

关于两个非同心圆的幂相等的点的轨迹称为这两个圆的

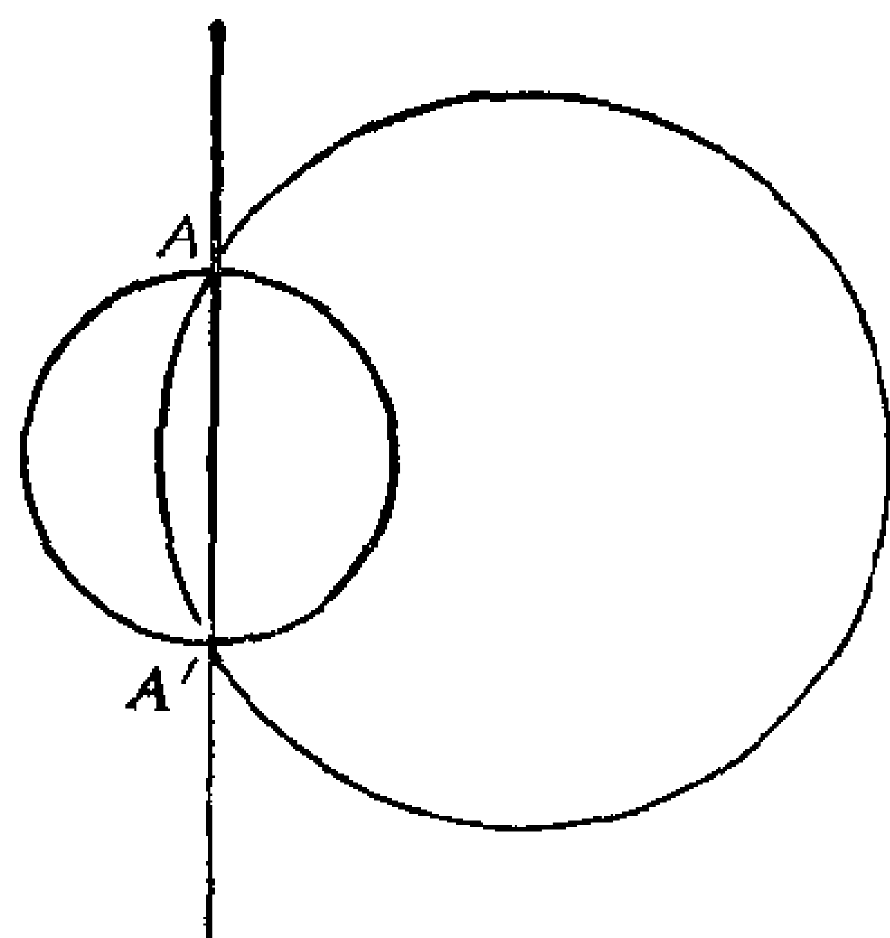


图 2.2B

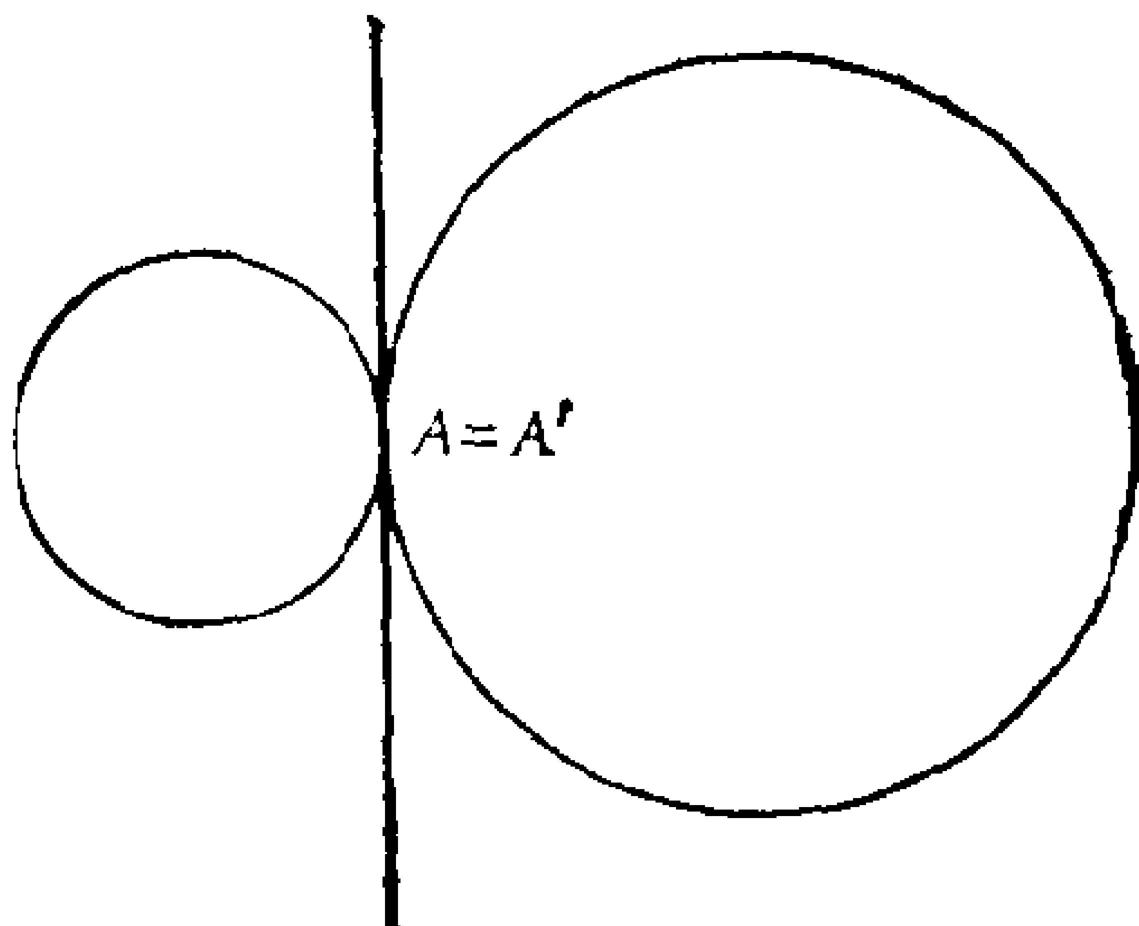


图 2.2C

根轴。当两个圆相交于A, A'两点时(图2.2B)，每一个交点关于两个圆的幂都是零，因此，直线AA'就是根轴。同理，当两个圆相切时(图2.2C)，根轴就是它们在切点处的公切线。

习　　题

1.向两个已知圆所作切线的长度相等的点的轨迹是什么？

2.当两个圆的圆心距大于它们的半径之和时，它们有四

条公切线。这四条公切线的中点是共线的.

3. 设 PAB, AQB, ABR, $P'BA$, $BQ'A$, BAR' 是在公共边 AB 的同一侧的六个相似三角形(在图2.2D上已画出其中的三个三角形；作它们关于 AB 的垂直平分线的反射① 则得到另外三个三角形)。这些三角形的不在 AB 上的顶点(即 P, Q, R, P', Q', R')都在同一个圆上。提示：比较 A 和 B 关于圆 PQR 的幂。

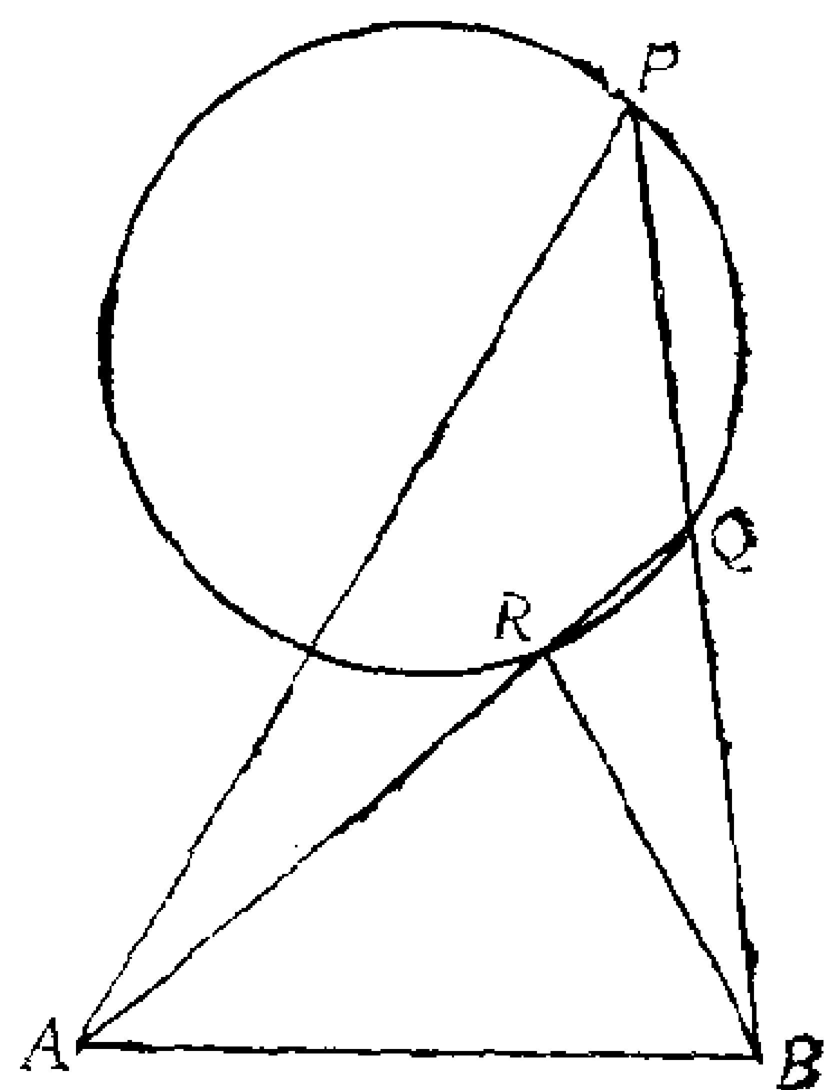


图 2.2D

4. 给定 a 和 b，则当 c 取哪些值时，方程(2.2.3)表示一个圆?

5. 试述求作两个已知的非同心圆的根轴的方法，要求这种作法适用于一个圆包含另一个圆在内的情形。

§2.3 共轴圆

方程(2.2.6)代表的两个圆(即任意两个非同心圆)是圆族

$$x^2+y^2-2ax+c=0$$

中的两个成员，其中 c 是固定的，而 a 在实数范围内变化(当 c 是正数时，要除去 $\pm\sqrt{c}$ 之间的值)。这个圆族称为共轴圆束，因为其中的任意两个成员都以固定的直线作为连心线和根轴。当 c 是负数时，族中的每个成员和 y 轴相交于固定点 $(0, \pm\sqrt{-c})$，因此该圆束是由所有经过这两个定点的

① 反射可以用来解许多几何问题，例如看Yaglom [29]。

圆组成的．类似地，当 $c=0$时，圆束是由所有与 y 轴在原点处相切的圆组成的． c 为正数的情形如图2.3A所示．

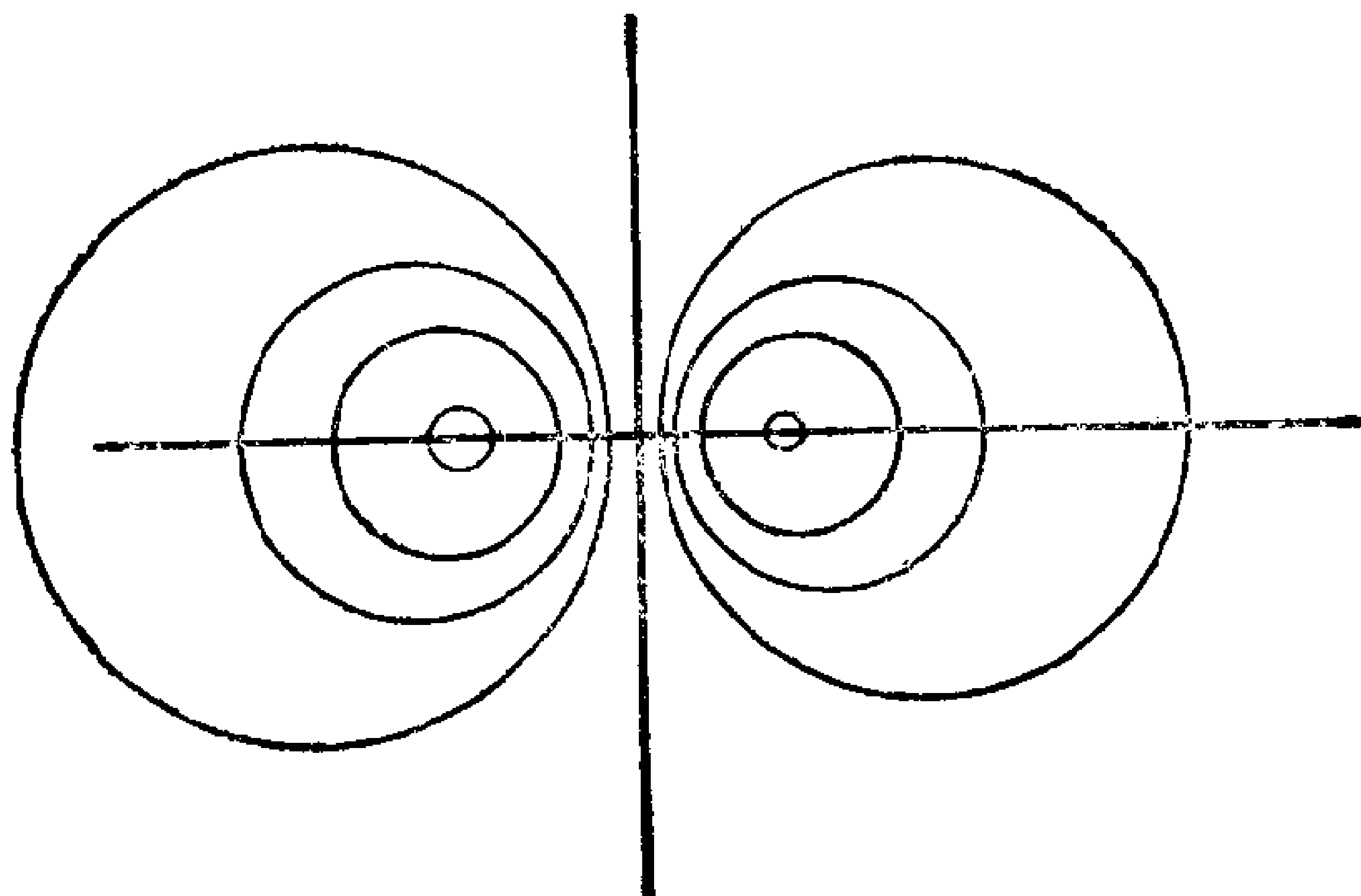


图 2.3A

如果在三个非共轴的圆中每两个都是非同心的，则把它们两两配对可得三条根轴．关于这三个圆的幂相等的点必定同时落在这三条直线上．反过来，其中两条根轴的交点关于这三个圆有相等的幂，因此它也在第三条根轴上．如果其中有两条根轴是平行的，则第三条根轴也与它们是平行的．于是有

定理2.3.1 若三个圆的圆心构成一个三角形，则有一点且只有一点关于这三个圆的幂是相等的．

这三条根轴的公共点称为这三个圆的根心．

习 题

1.已知两个圆内切于T点，设大圆的弦 AB 与小圆相切于P点，则直线 TP 平分$\angle ATB$．

2. 若三个两两不相交的圆的根心是O，则从O向这三个圆所作的六条切线的切点在一个圆上。

§2.4 再论三角形的高线和垂心

上一章已讨论过的外接圆值得进一步研究。图2.4 A画出了外接圆ABC的圆心O，经过点A的直径AA_0及垂直于BC的半径$OL=R$，还有高线$AD=h_a$。由于在B和A_0处的角相等，得到$\triangle ABD\sim\triangle AA_0C$，所以

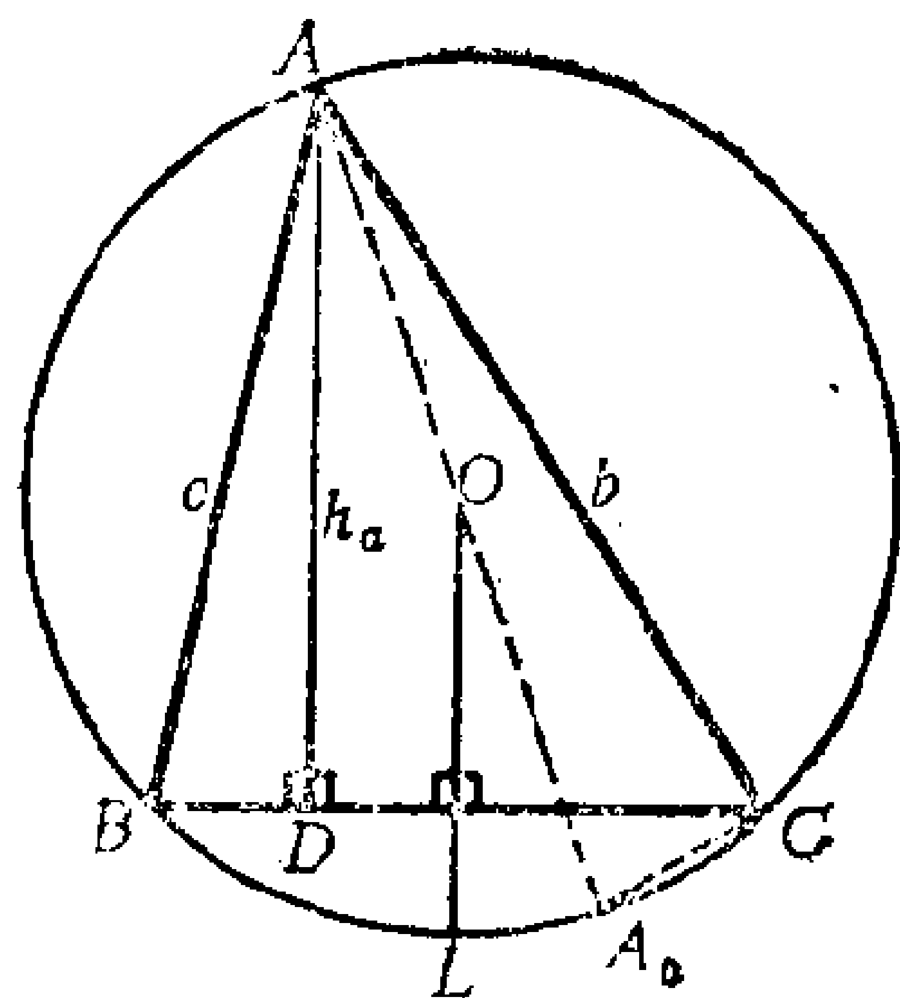


图 2.4A

$$\frac{h_a}{c}=\frac{b}{AA_0},$$

即

$$h_a=\frac{bc}{2R}. \qquad (2.4.1)$$

从$\angle BAC$减去两个相等的角

$$\angle A_0AC=\angle BAD=90^\circ-B,$$

则得

$$\angle DAA_0=A-2(90^\circ-B)=A+2B-(A+B+C)$$
$$=B-C.$$

当$B>C$时，在图中已画出了$\angle DAA_0=\angle DAO$。若$B<C$，则等角A_0AC和BAD会有部分重叠，但是仍有$\angle DAO=C-B$，结果总是

$$\angle DAO=|B-C|. \qquad (2.4.2)$$

图2.4B表明高线 AD,BE,CF 的延长线与外接圆分别相交于 D',E',F' 三点。自然，H 是垂心。现在 $\angle DAB=\angle FCB$，它们都是 $\angle B$ 的余角；因此我们用同一个记号 θ 记这两个角。又有 $\angle BCD'=\angle BAD'$，所以也把 $\angle BCD'$ 记作 θ。因为直角三角形 CDH 和 CDD' 全等，故

$$HD=DD'. \quad (2.4.3)$$

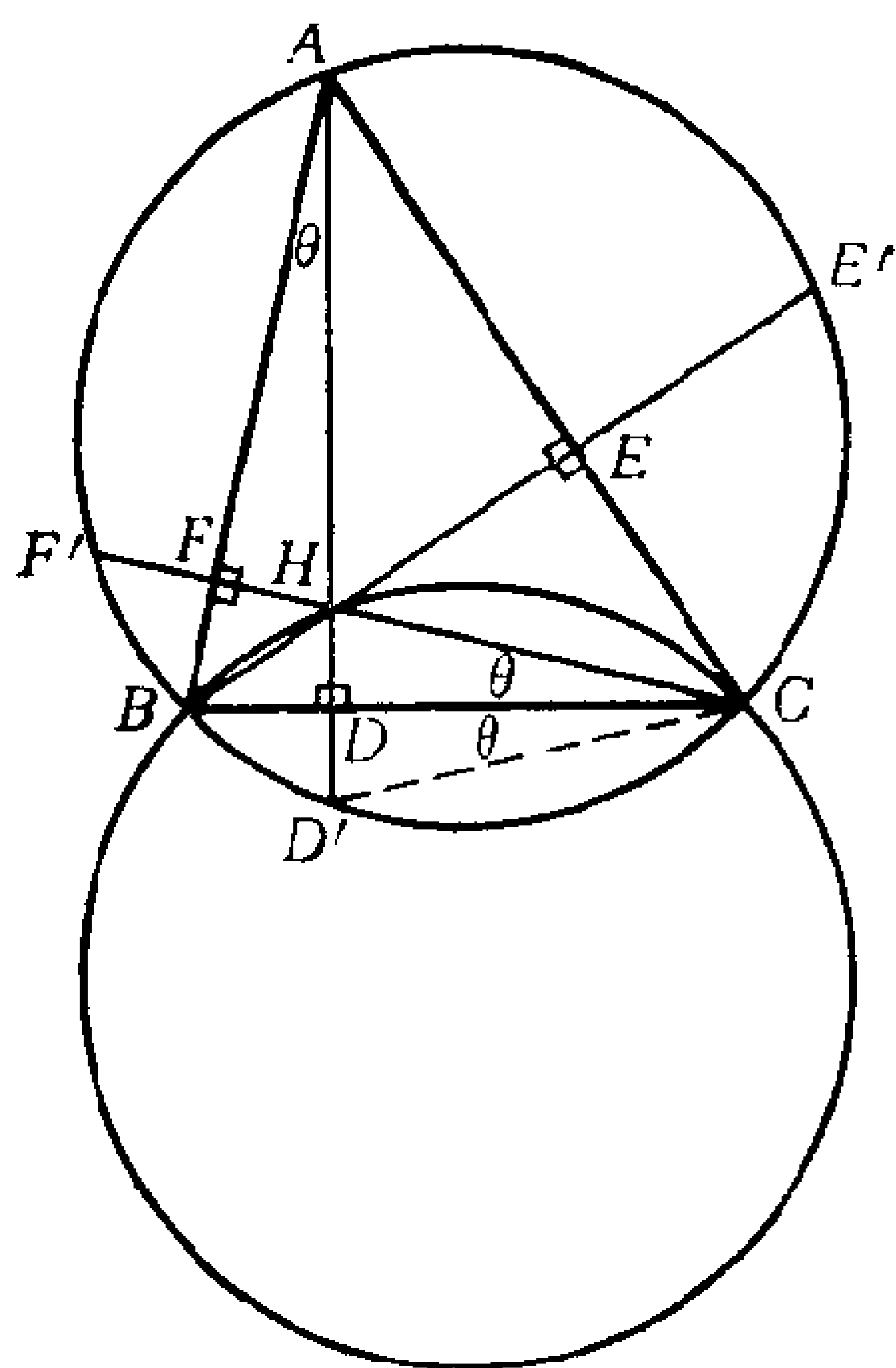


图 2.4B

同理，$HE=EE'$，

$$HF=FF'.$$

因为以 AB 为直径的圆经过 D,E 两点，由定理2.1.1得

$$HA\times HD=HB\times HE.$$

同理，

$$HB\times HE=HC\times HF.$$

因此

$$HA\times HD=HB\times HE=HC\times HF. \quad (2.4.4)$$

设 X,Y,Z 分别是边 BC,CA,AB 上的任意点，则以塞瓦线 AX,BY,CZ 为直径的圆分别经过垂足 D,E,F（在图2.4C上已画出了后两个圆）。(2.4.4)式中三个相等的表达式分别是 H 关于这三个圆的幂。因此 H 是这三个圆的根心。这样，我们证明了两个有趣的定理，它们常常是作为难题出现的。

定理2.4.5 以任意两条塞瓦线为直径的两个圆的根轴必经过三角形的垂心。

定理2.4.6 *H是以塞瓦线为直径的三个非共轴圆的根心。*

另外，下面的简单考虑也导致同样的结果。设AD是从A引出的高线，经过A,D的共轴圆束可以说成是以经过A点的塞瓦线为直径的圆组成的集合。AB和AC就是两条这样的塞瓦线。这样，以BC,CA,AB为直径的圆两两相交，并以高线作为它们的根轴，于是H是它们的根心。(由此可见，高线的共点性可以看作定理2.3.1的特例)。因此，H关于所有以塞瓦线为直径的圆是等幂的。

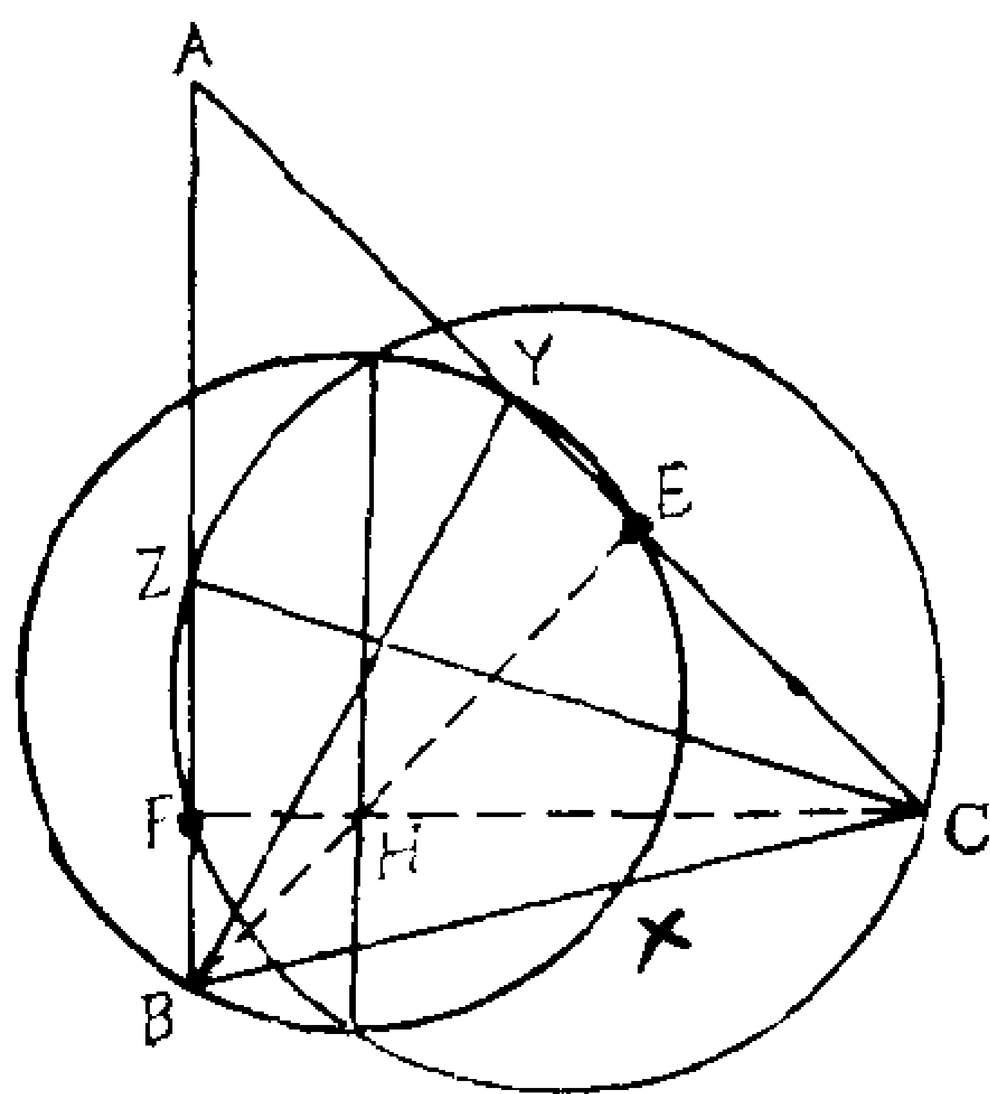


图 2.4C

在定理2.4.6中，“非共轴”一词值得注意，它的意思是三条塞瓦线不能是从$\triangle ABC$的同一个顶点引出的。在下一个定理中，我们会看到它蕴含着更丰富的内容。

如果加上一些非实质性的条件，则从定理2.4.6(用于塞瓦线AX,BY,CZ)可以得到几个饶有趣味的问题。尽管定理中的三条塞瓦线不必是共点的，但是假定它们是共点的，则更能迷惑人。这样，我们有下面的问题：若以三角形的中线(可换成高线和角平分线)为直径作圆，则这三个圆的根心必是三角形的垂心。

三条塞瓦线不共点的最有意思的情形是：假定X,Y,Z是分别落在BC,CA,AB(或它们的延长线)上的共线点，如图2.4D。这样，我们可以把X,B,C说成是$\triangle AYZ$的各边上的共线点，把Y,C,A说成是$\triangle BZX$的各边上的共线点，

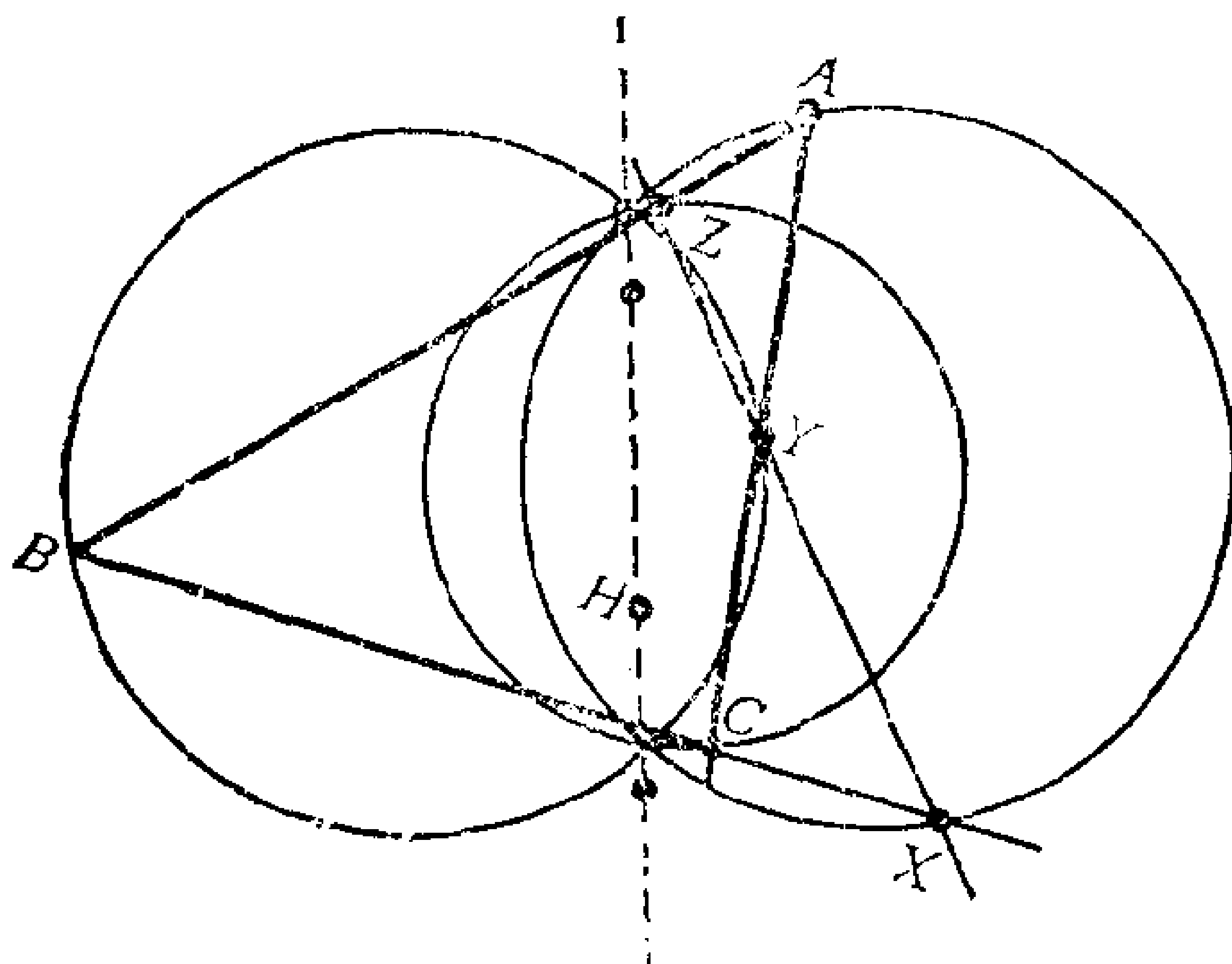


图 2.4D

把 Z, A, B 说成是 $\triangle CXY$ 的各边上的共线点.因此,以 AX, BY, CZ 为直径的圆，两两之间的根轴经过 H；同理，这三个圆的两两之间的根轴也经过另外三个三角形的垂心。因为这四个垂心明显地是不同的，故这三条根轴必定重合。这就证明了。

定理2.4.7 如果四条直线彼此相交成六点 A, B, C, X, Y, Z，使得 XBC, YCA, ZAB, XYZ 是共线点组，则以 AX, BY, CZ 为直径的圆必共轴，四个三角形 AYZ, BZX, CXY, ABC 的垂心必共线。

三角形及其高线的另一个性质如图1.3C所示，如果我们仔细地检查这个图，则可知：正如 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，A 点是 $\triangle HBC$ 的垂心，B 点恰好是 $\triangle HAC$ 的垂心，C 点是 $\triangle HAB$ 的垂心。这样的构图 $ABCH$ 称为垂心四角形，它有许多有趣的性质。在此仅举一例：若 $ABCH$ 是一个垂心四角形，每取三个顶点所作的三角形共有四个，则这四个三角形有相同的外接圆半径.

最简单的证明是利用方程(2.4.3)和图2.4B。在该图中，

$\triangle HBC$ 和$\triangle D'BC$ 是全等的，故它们的外接圆全等。因此$\triangle ABC$ 的外接圆全等于 $\triangle HBC$ 的外接圆；同理，另外两个三角形的外接圆也与它们全等。

习　　题

1. 高线延长线与外接圆的交点所构成的三角形相似于垂三角形。

2. 设 $\triangle ABC$ 的内角平分线延长与外接圆相交于L，M, N，试用角A, B, C表示$\triangle LMN$ 的各个角。

§2.5　西姆松线

如果从点P向三角形ABC的各边引垂线，则它们的垂足通常构成三角形 $A_1B_1C_1$(即§1.9所讨论的垂足三角形)。现在我们考虑P落在外接圆上的例外情形，如图2.5A。为确定起见，假定P落在外接圆的不包含B点的弧CA上，并且它到C点的距离不小于它到A点的距离。其余的状况都可以通过重新命名A, B, C来处理。因为在A_1, B_1, C_1处是直角，所以P落在$\triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1B_1C$和$\triangle AB_1C_1$的外接圆上，故

$$\angle APC = 180° - B = \angle C_1PA_1,$$

两边减去$\angle APA_1$得

$$\angle A_1PC = \angle C_1PA.$$

因为A_1, C, P, B_1在一个圆上，故

$$\angle A_1PC = \angle A_1B_1C;$$

又因为A, B_1, P, C_1在一个圆上，故

$$\angle C_1PA = \angle C_1B_1A.$$

于是

$$\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A,$$

即 A_1, B_1, C_1 是共线的；此时，垂足三角形是"退化"的.

反过来，如果P点的位置使相应的垂足三角形是退化的，显然P必定落在$\triangle ABC$的一个角的内部，且在该角对边的外侧平面区域内。适当地重新命名顶点，总可以假定上面所说的角是B，而点C_1落在边BA的从A点出发的延长线上，如图2.5A。于是我们可把上面关于角的讨论逆转过来，得知P点在外接圆上，因此有

定理2.5.1 从一点向三角形的各边所引垂线的垂足共线的充分必要条件是，该点落在三角形的外接圆上。

这三个垂足所在的直线叫做该点关于三角形的西姆松线。罗伯特·西姆松(1687—1768)在几何学和算术方面都有一些贡献。例如他发现，如果f_n是斐波那契数列1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …的第n项，则 $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n$ [6, pp.165—168]. 把西姆松线归于他的名下，则是因为它是西姆松的几何观念的典型代表。然而历史学家想从他的著作中发掘出西姆松线却是徒劳的。实际上，西姆松线是1797年由华列士(W. Wallace)发现的。

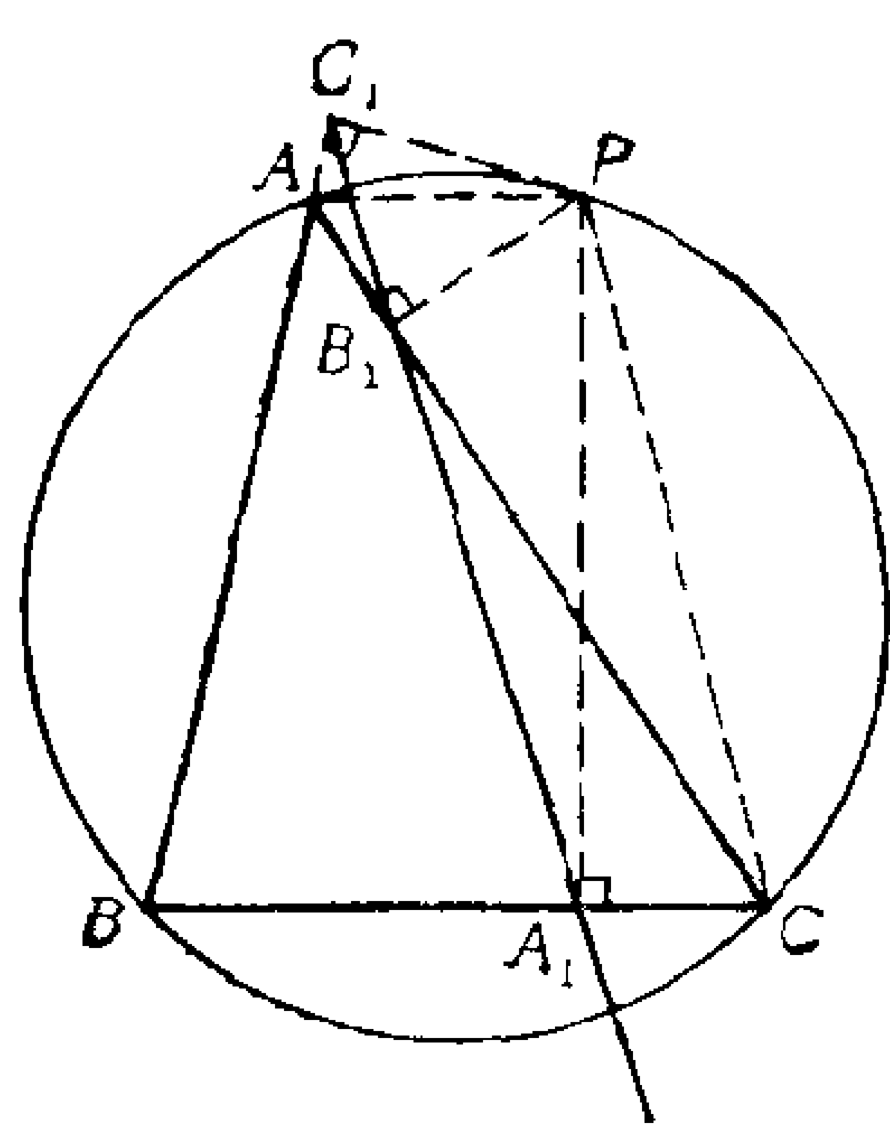


图 2.5A

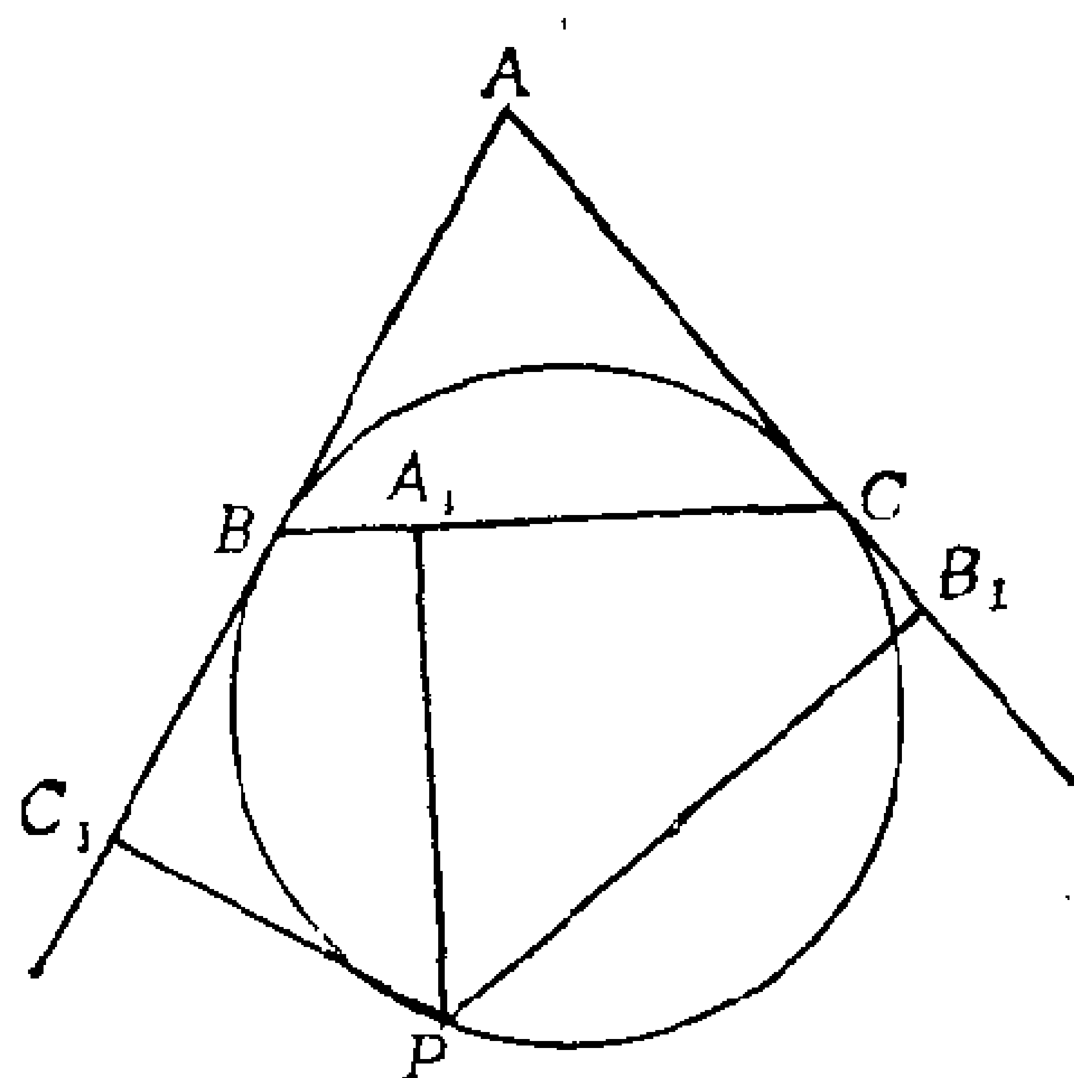


图 2.5B

习　题

1. 若$\triangle ABC$有一个角是钝角，则定理2.5.1的证明是否要修改？

2. 圆上的什么样的点恰好以CA为它的西姆松线？

3. 是否有点落在它自己的西姆松线上？这是一些什么样的直线？

4. 圆在B，C两点的切线相交于A点，如图2.5B所示．设$A_1B_1C_1$是等腰三角形ABC对于圆上任意一点P的垂足三角形，则

$$PA_1^2 = PB_1 \times PC_1.$$

§2.6 托勒密定理及其扩充

利用西姆松线的概念可以导出一个十分有用的定理．考察图2.5A，尽管“垂足三角形”$A_1B_1C_1$是退化的，但是它的“边”长仍旧是由定理1.9.1给出的：

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot AP}{2R}, \quad A_1C_1 = \frac{b \cdot BP}{2R}, \quad A_1B_1 = \frac{c \cdot CP}{2R}.$$

因为$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$，我们得到$c \cdot CP + a \cdot AP = b \cdot BP$，即

$$AB \times CP + BC \times AP = AC \times BP.$$

因为$ABCP$是圆内接四边形，于是我们证明了托勒密（Ptolemy）定理：

定理2.6.1　若四边形内接于圆，则它的两对对边的乘积之和等于它的对角线的乘积．

托勒密定理有逆定理．因为当B_1取不在线段A_1C_1上的任意位置时，方程$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$必须换成“三角形不等式”

$$A_1B_1+B_1C_1>A_1C_1,$$

这就给出

$$AB\times CP+BC\times AP>AC\times BP.$$

因此有

定理2.6.2 设点P不在三角形ABC的外接圆的弧CA上，则

$$AB\times CP+BC\times AP>AC\times BP.$$

习 题

1. 设P是等边三角形ABC所在平面上的任意一点，则根据P落在或不落在外接圆的弧CA上，分别有$PC+PA=PB$，或$PC+PA>PB$(此结果的一个有趣的应用请看[23, pp.11—12])。

2. 若P在正方形$ABCD$的外接圆的弧CD上，则

$$PA(PA+PC)=PB(PB+PD).$$

3. 如图2.6A，一个圆过平行四边形$ABCD$的顶点A，并且在它的两条边和一条对角线上截出P，R，Q三点，则

$$AP\times AB+AR\times AD=AQ\times AC.$$

提示：将定理2.6.1用于四边形$PQRA$，然后把三角形PQR的边换成相似三角形CBA的对应边。

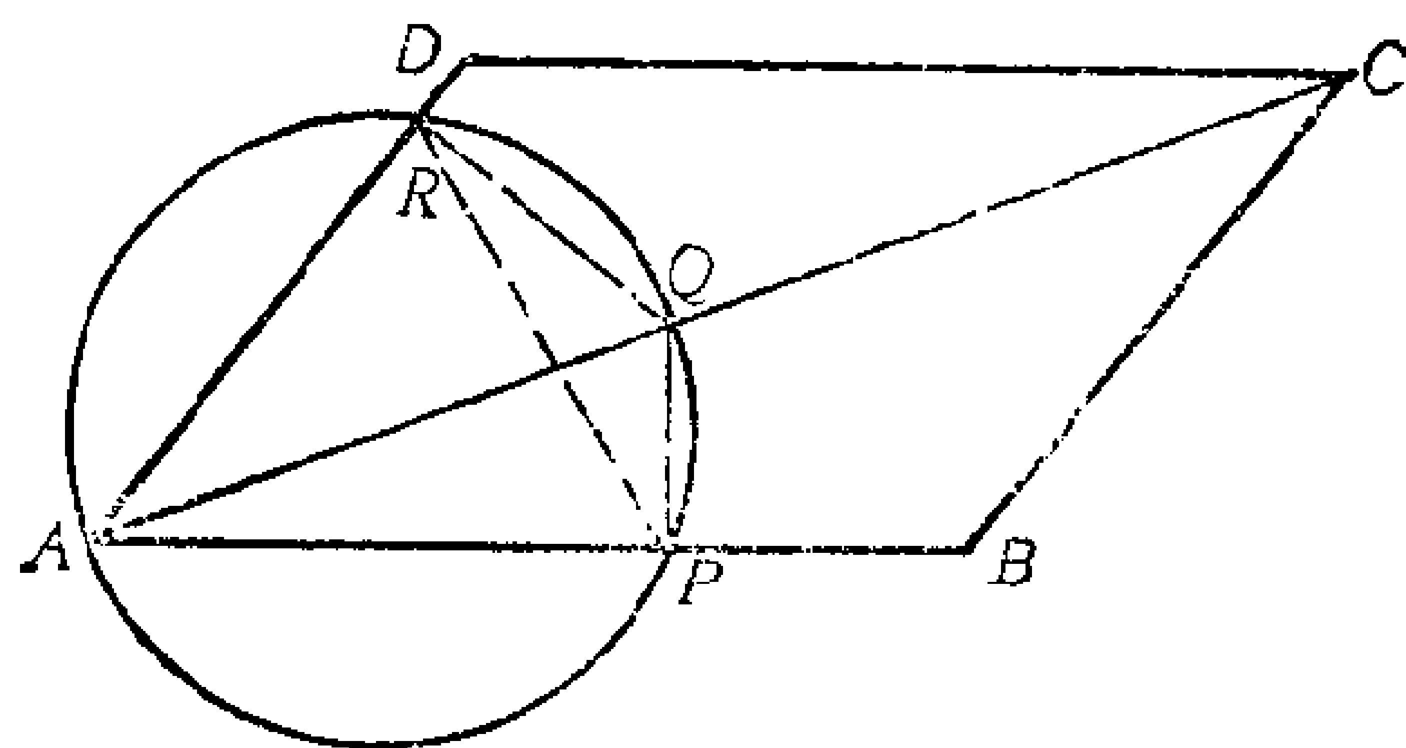


图 2.6A

§ 2.7 再论西姆松线

西姆松线有许多有趣的性质，其中有一些是很值得研究的。我们从考察图2.7A着手。该图和图 2.5A 一样，只是把垂线PA_1延长并与外接圆相交于U点，并且画出了直线AU。

从圆内接四边形 $PAUC$ 和 PB_1A_1C 知道

$$\angle PUA=\angle PCA=\angle PCB_1=\angle PA_1B_1.$$

因此直线AU与西姆松线 A_1B_1 平行。

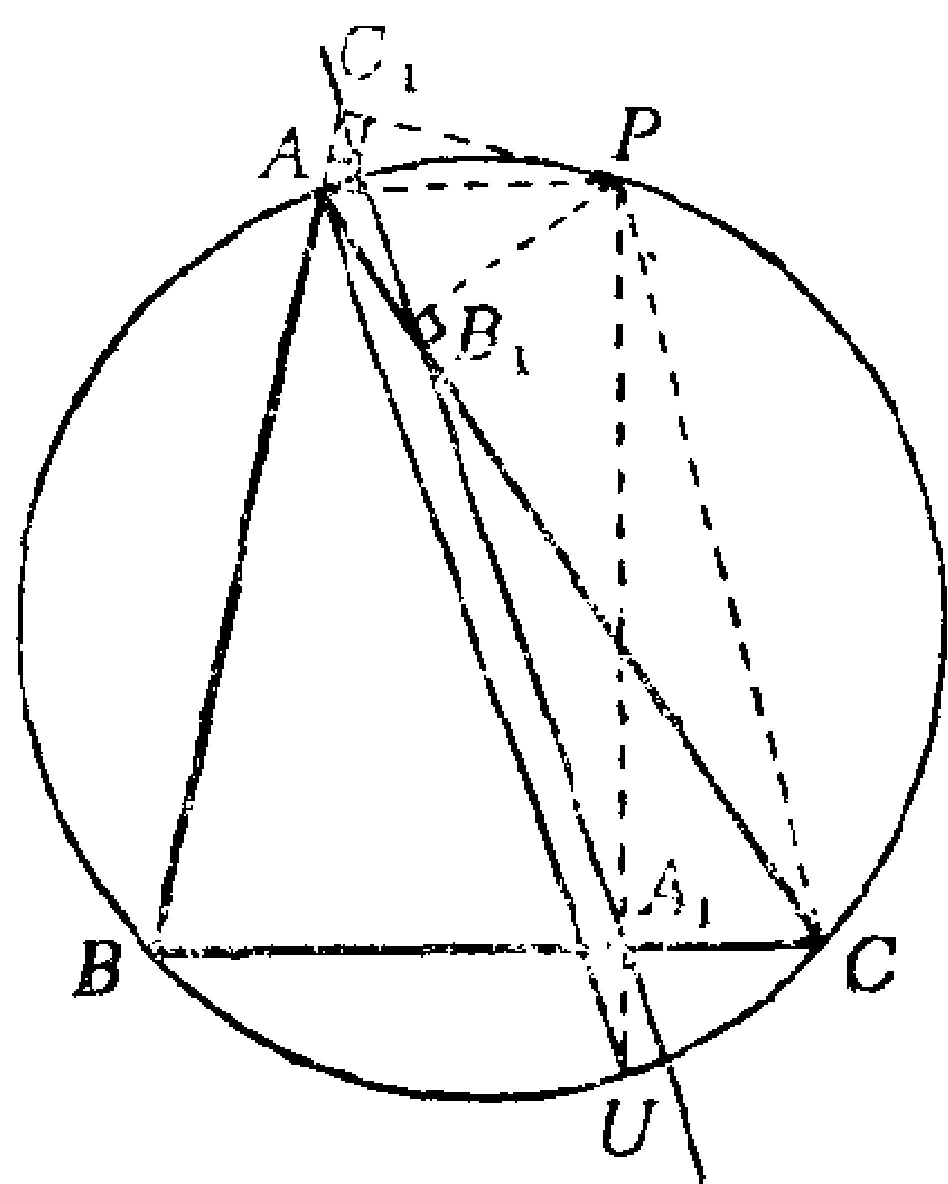


图 2.7A

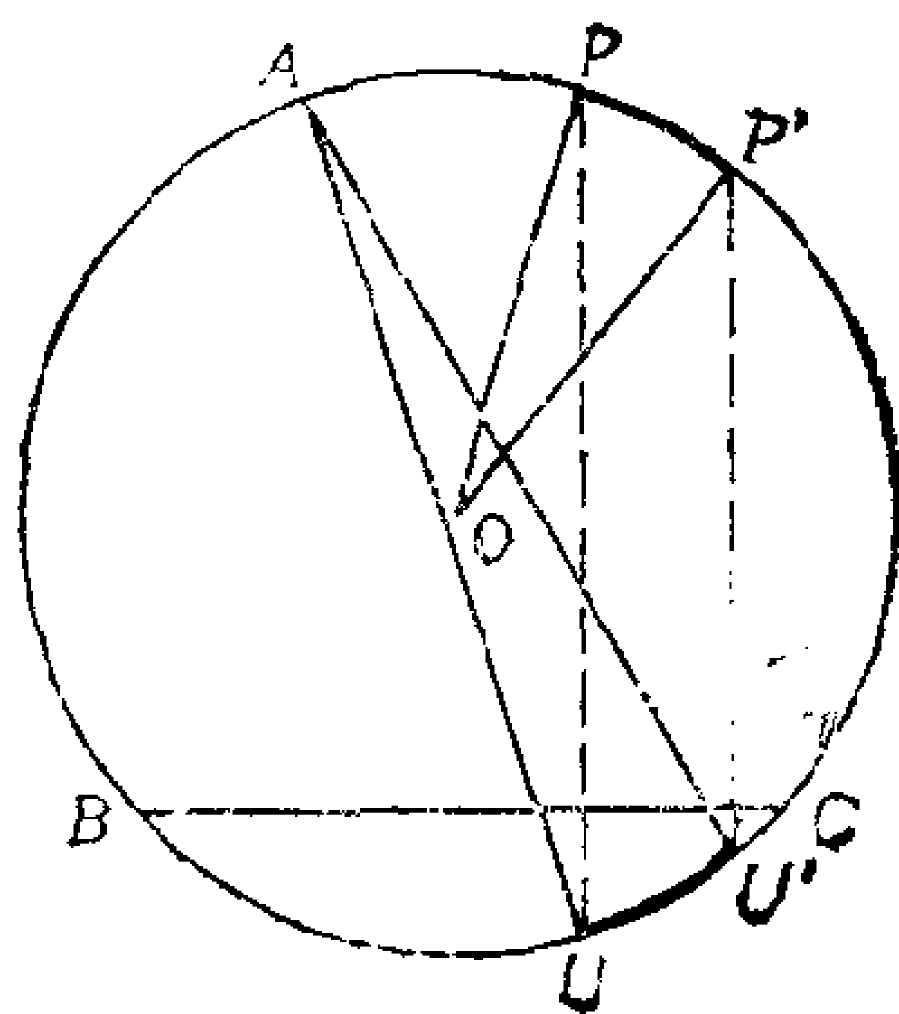


图 2.7B

现在我们比较点P的西姆松线和另一点 P'（自然也在外接圆上）的西姆松线。这两条西姆松线之间的夹角恰好是与它们分别平行的直线AU, AU'之间的夹角 UAU'，见图2.7B。因为弦 PU 和 $P'U'$ 都垂直于BC，因而它们互相平行，故截出的弧 PP' 和 UU'相等。这样

$$\angle UAU'=\frac{1}{2}\angle UOU'=\frac{1}{2}\angle POP'.$$

若考虑到角的符号，则有

$$\angle UAU' = \frac{1}{2}\angle UOU' = -\frac{1}{2}\angle POP'.$$

于是我们证明了：

定理2.7.1 在外接圆上任意两点P和P'的西姆松线之间的夹角等于弧$P'P$的度数的一半。

如果我们设想点P绕外接圆作匀速运动，则直线AU绕点A以半倍角速度朝相反的方向作匀速转动；当P扫过整个外接圆时，直线AU恰好翻转它的指向。与此同时，西姆松线将绕着一个连续变动的旋转中心作相应的转动。事实上，西姆松线的包络是一条美丽、匀称的曲线，称为“斯泰纳摆线”[20]或三尖曲线。弗莱彻(T.J.Fletcher)制作的影片“西姆松线”十分清晰地演示了西姆松线的上述运动。

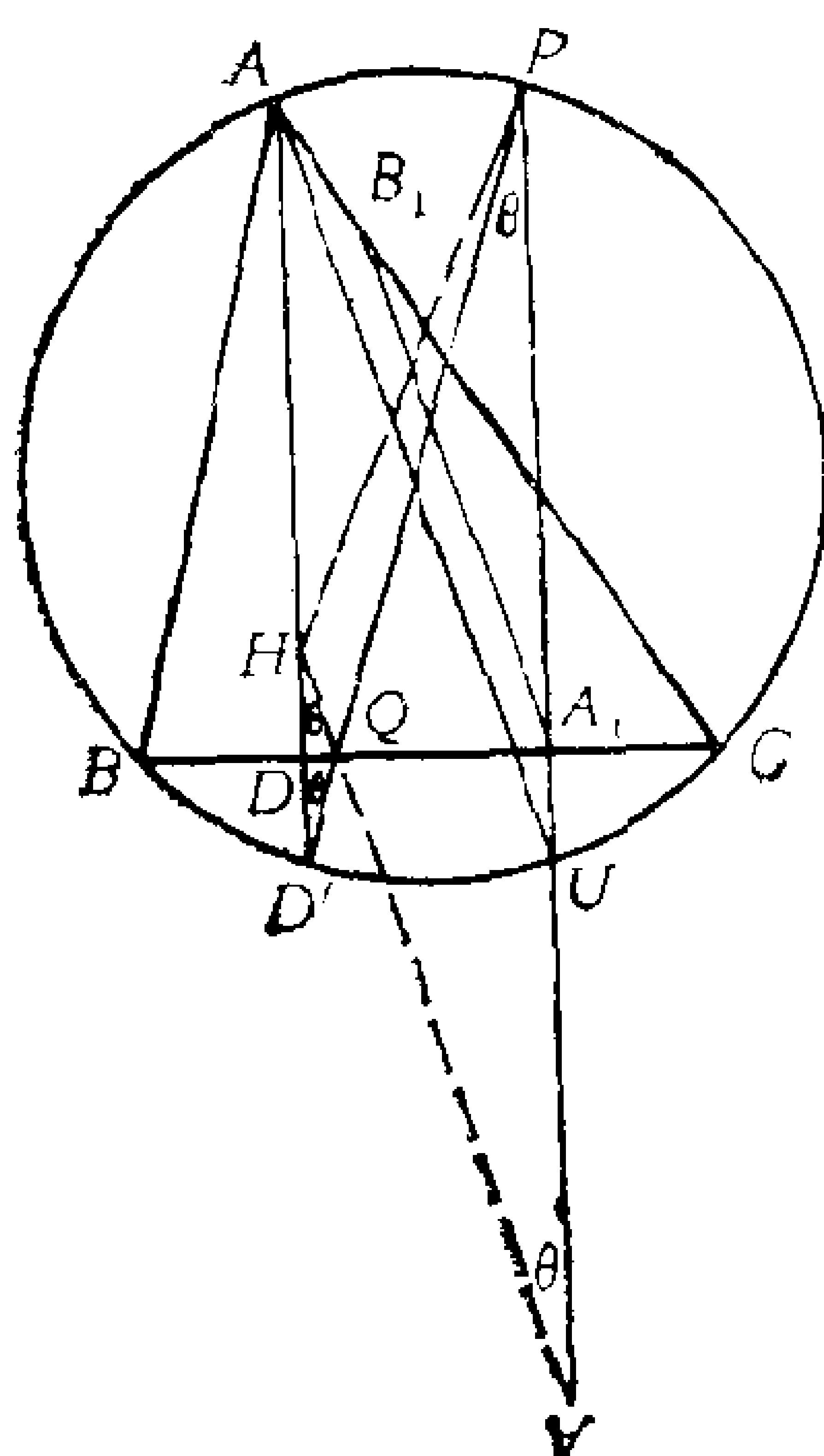


图 2.7C

为了继续进行研究，我们考察图2.7C，即在图2.4B和图2.7A中添上辅助线HP, $D'P$(和BC相交于Q)和HQ（延长后和PU相交于V)。因为HD'和PV都垂直于BC，方程(2.4.3)说明三角形QHD'和QPV是等腰的。换言之，HV是$D'P$在关于BC的反射下的像。因为

$$\angle D'HV = \angle PVH = \angle D'PU = \angle D'AU,$$

所以直线 HV 平行于 AU，而后者是平行于点 P 的西姆松线的。

最后我们看到：在 $\triangle PHV$ 中，西姆松线 A_1B_1 平行于边 HV 且平分边 PV（于 A_1）。因此，它必定平分另一边 PH。

定理2.7.2 外接圆上任意一点的西姆松线平分该点和垂心的连线。

以上所说的只是西姆松线这个专题的导论。它们还有许多别的性质，我们不得不遗憾地把它们留给别的书去讨论了。

习　题

1. 外接圆上对径点的西姆松线是互相垂直的，并且相交在九点圆上。

2. 设 ABC 是圆 O 的内接等边三角形，P 是圆上任意一点，则 P 的西姆松线平分半径 OP。

§2.8 蝴蝶形定理

这个定理的出现已有相当长的时间了。它可叙述成（看图2.8A）：

定理2.8.1 在圆内经过弦 PQ 的中点 M 画两条弦 AB 和 CD；设弦 AD 和 BC 分别与 PQ 相交于 X 和 Y，则 M 是 XY 的中点。

这个定理的证明有很多，其篇幅和难度各有所异。有三个证明是州立尼沃克学院的卓尔（Zoll）博士提供的。据他说，其中有一个证明是霍纳（W.G.Horner）在1815年提出的。霍

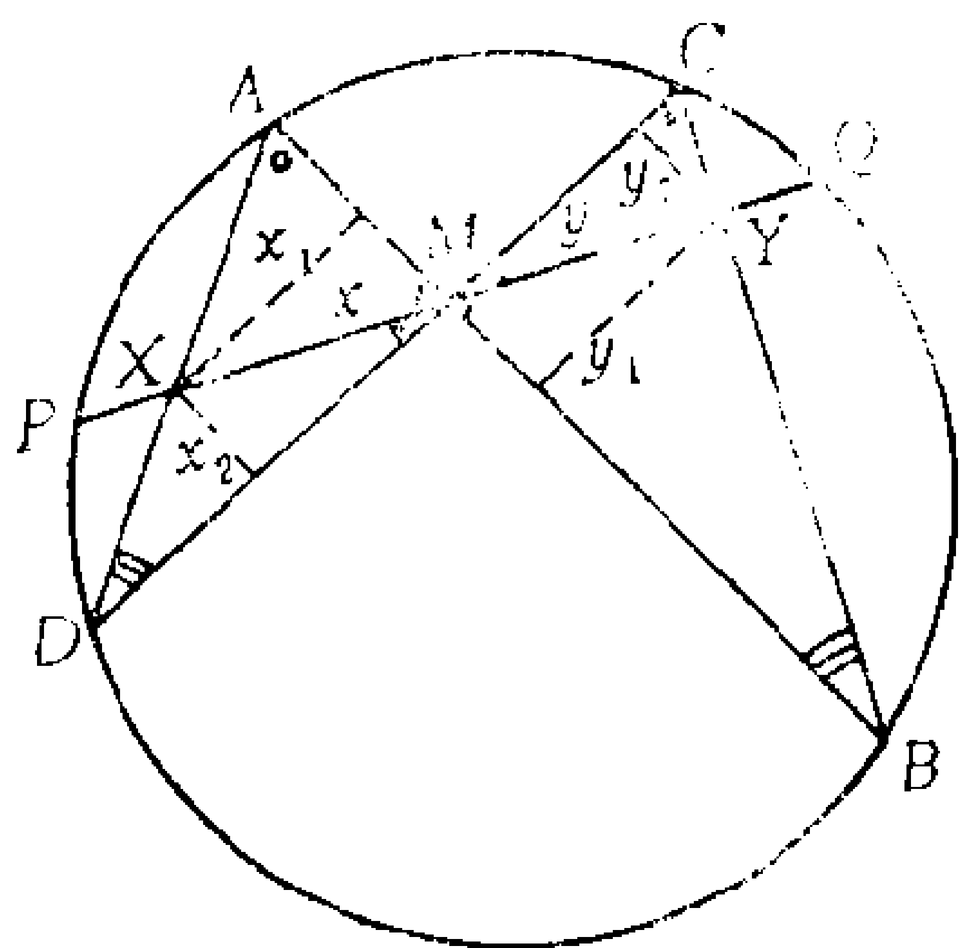


图 2.8A

纳是求多项式方程的近似根的霍纳法的发明者。(贝尔说，一个中国数学家①早就知道了霍纳的方法。)另一个证明可看约翰逊(R. Johnson)的书[17, P.78]。最简短的证明要用到射影几何[7, PP.78, 144]。这里所给的证明虽然不十分短，但是它是简单的、易记忆的。

从X和Y向AB画垂线x_1和y_1，向CD画垂线x_2和y_2。为方便起见，记$a=PM=MQ$，$x=XM$，$y=MY$。由成对的相似形Mx_1和My_1，Mx_2和My_2，Ax_1和Cy_2，Dx_2和By_1分别可得

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1},\qquad \frac{x}{y}=\frac{x_2}{y_2},\qquad \frac{x_1}{y_2}=\frac{AX}{CY},\qquad \frac{x_2}{y_1}=\frac{XD}{YB}.$$

因此

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1}{y_2}\cdot\frac{x_2}{y_1}=\frac{AX\times XD}{CY\times YB}=\frac{PX\times XQ}{PY\times YQ}$$

$$=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2}=1,$$

即$x=y$，这就是我们要证明的结果。

习 题

1. 在图2.8A中，AC和BD(延长)与PQ(的延长线)相交于两点，则交点到M的距离相等。

① 中国古代数学家秦九韶在《数书九章》(1247年)中已叙述了通常所谓的霍纳法，这比霍纳约早了五百多年。——译者

2. 设PT和PB是圆的两条切线，AB是过B点的直径，TH是从T向AB所引的垂线，则AP平分TH。

3. 设$\triangle ABC$的内切圆(圆心为I)与边BC相切于X，A'是该边的中点，则$A'I$(的延长线)平分AX。

§2.9 莫莱定理

初等几何中最令人惊讶的定理之一是莫莱(F.Morley)在1904年左右发现的(F.莫莱是小说家克利斯朵夫·莫莱的父亲，克·莫莱的作品“左翼的雷声”(Thunder on the Left)按时间发展的线索特别投合几何学家的癖好)。他在给英国剑桥的一位朋友的信中提到了这个定理，后来过了20年才在日本发表。在此期间，该定理再次被发现并作为问题出现在《教育时报》(Educational Times)上。送交的答案有两个，其中之一是纳拉尼恩加① (M.T.Naraniengar)给出的，他的证明是很简洁的。这个定理是

定理2.9.1 将任意三角形的各角三等分，则每两个角的相邻三等分线的交点构成一个等边三角形。

纳拉尼恩加的证明需要一个预备定理(看图2.9A)：

引理 若四个点Y',Z,Y,Z'满足条件

$$Y'Z=ZY=YZ',$$

$$\angle YZY'=\angle Z'YZ=180°-2\alpha>60°,$$

则它们落在一个圆上。此外，如果在直线$Y'Z'$的远离Y的一侧有一点A，使$\angle Y'AZ'=3\alpha$，则第五点A也在同一个圆上。

为了证明这个引理，我们作两个相等的角YZY'和$Z'YZ$的平分线，设它们的交点是O。则$\triangle OY'Z$，$\triangle OZY$，$\triangle OYZ'$

① Mathematical Questions and Their Solutions from the *Educational Times(New Series)*, 15(1909), p.47.

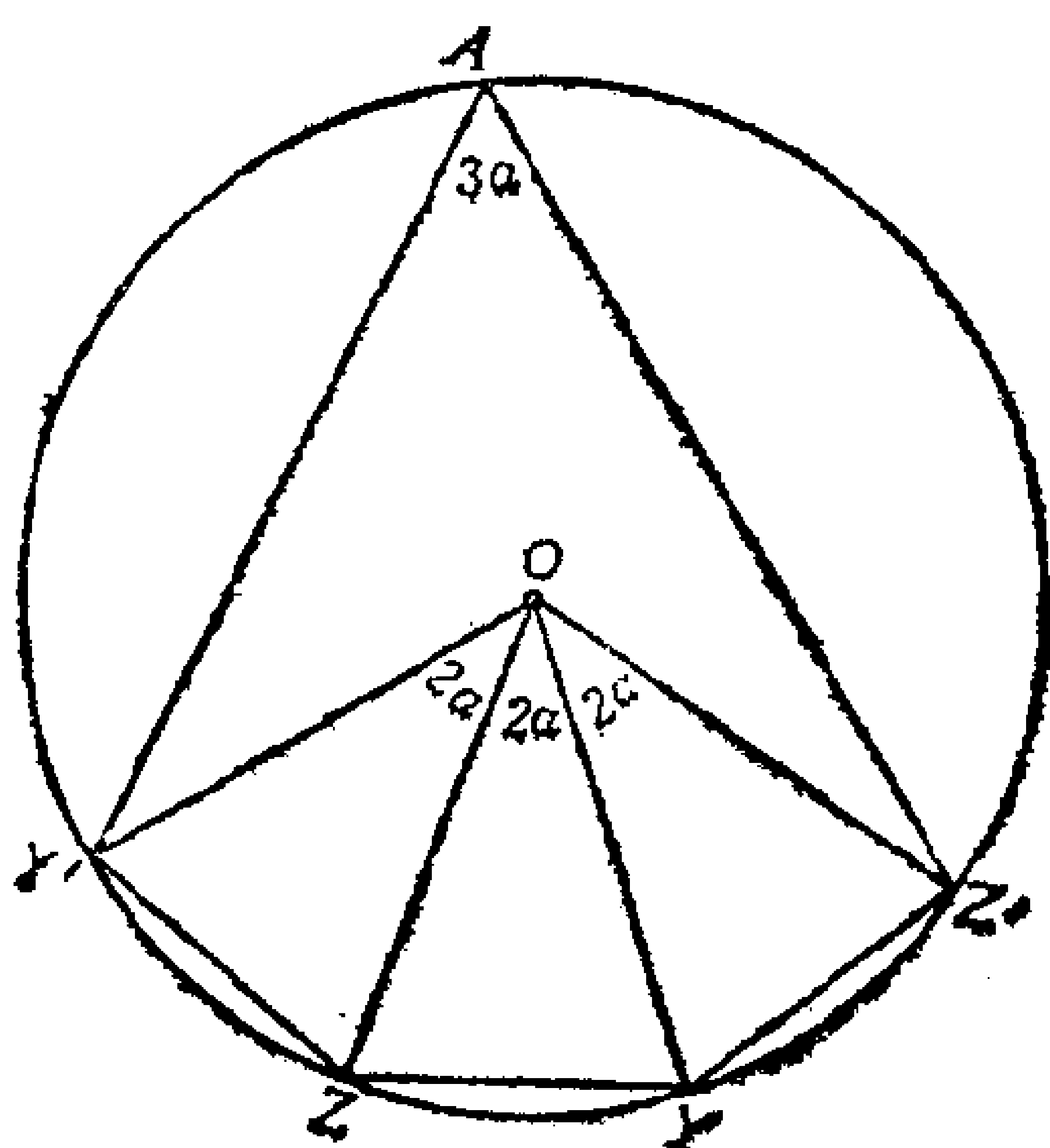


图 2.9A

是三个全等的等腰三角形，底角是$90°-\alpha$。它们的腰OY'，OZ,OY,OZ'是以O为圆心的一个圆的半径，它们在公共顶点O的顶角是2α。换句话说，弦$Y'Z,ZY,YZ'$在圆心O所张的角都是2α，因而它们在不包含Y的弧$Y'Z'$上的任意一点张的角都是α。这段弧可以说成是对于弧$Y'Z'$的张角是3α的点(在直线$Y'Z'$的不含Y的一侧)的轨迹。现在A恰是这样的一个点，故A在该圆上。

现在我们已为定理2.9.1本身的证明作好了准备。在图2.9B中，设角$B=3\beta$的三等分线与角$C=3\gamma$的三等分线相交于U和X。在$\triangle BCU$中，BX和CX分别是角B和C的内平分线；因此X是$\triangle BCU$的内心，故UX平分角U。若在直线CU和BU上取点Y和Z，使XY和XZ分别在XU的两旁成$30°$角，则$\triangle UXY\cong\triangle UXZ$，$XY=XZ$；因为在$X$的角是$60°$，所以$\triangle XYZ$是等边三角形。

$\triangle UZY$也是等腰三角形；它的角U就是$\triangle UBC$的角U，

图 2.9B

而后一个三角形的另外两个角是2β和2γ，因此$\triangle UYZ$在Y和Z处的底角是$\beta+\gamma$。

记$\alpha=A/3$，从$A+B+C=180°$得到

$$\alpha+\beta+\gamma=60°, \qquad \beta+\gamma=60°-\alpha.$$

这样

$$\angle YZU=60°-\alpha, \qquad \angle XZU=120°-\alpha.$$

接着，我们在BA上取$BY'=BX$，在CA上取$CZ'=CX$。现在我们有

$$\triangle BZX\cong\triangle BZY', \qquad \triangle CYX\cong\triangle CYZ',$$

所以

$$Y'Z=ZX=ZY=YX=YZ'.$$

在用引理之前，还须求出$\angle YZY'$和$\angle Z'YZ$的值。然而这是十分简单的。因为相等的角BZY'和BZX有相等的补

角，故

$$\angle UZY' = \angle XZU = 120^\circ - \alpha,$$

$$\angle YZY' = \angle YZU + \angle UZY'$$

$$= (60^\circ - \alpha) + (120^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$$

同理，$\angle Z'YZ = 180^\circ - 2\alpha$。自然，$\alpha = A/3 < 60^\circ$。

根据引理，五点Y', Z, Y, Z'，A都在一个圆上。因为相等的弦$Y'Z, ZY, YZ'$在A点张成相等的圆周角α，故AZ和AY是$\triangle ABC$的角A的三等分线。换句话说，为构造等边三角形而作出的点X, Y, Z，实际上就是莫莱定理中所说的交点，定理得证。

习　题

1. 设角的三等分线AZ和CX(延长)相交于点V，BX和AY相交于点W，则三条直线UX, VY, WZ是共点的。(使用射影几何的语言，这就是说三角形UVW和XYZ是透视的。一般说来，UVW不是等边三角形。)

2. 对于什么样的三角形ABC，$AY'ZYZ'$恰好是正五角形？

3. 当$\triangle ABC$是等边三角形时，四个点Y', Z, Y, Z'属于一个正九角形的顶点，其中A点与ZY边相对。

4. 设三角形的三个内角是$3\alpha, 3\beta, 3\gamma$，外接圆半径是R，则莫莱三角形的边长是$8R\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$。

5. 若在矩形$BCZ'Y'$的边$Z'Y'$上有$Z'Y = YZ = ZY'$，矩形的中心X与Y, Z成等边三角形，则BX和BZ三等分直角B。

第三章　共线性和共点性

他打开铰链结合的装置，
把它推进又拉开，
直到它成为正方形和长方形，
仿佛是欧几里得原本的第二卷里
精巧复杂的图形。

C.L.多德桑

在讨论三角形和四角形(或四边形)的若干深入的性质之后，我们将转向射影几何的领域(只涉及很少的一部分内容)。系统讲述这个令人神往的题目只得留给别的书去完成，但是它的四个最基本的定理应当在这里讲，因为它们能用欧几里得的方法来证明；实际上，其中的三个定理是十分古老的，在它们被发现时，还不可能采用别的方法。所有这些定理或者涉及共线性(某组点落在一条直线上)，或者与共点性有关(某组直线经过一个点)。只要我们体会到，在许多情形下平行线的举止仿佛是一组共点的直线，则就达到了射影几何的境界。

§3.1　四角形.瓦里农定理

所谓多角形是指若干点(称为顶点)及相同数量的若干直线段(称为边)组成的图形，即它是平面上一个有序的成循环圈的点组以及连结各对相邻点的线段组成的封闭图形，并且要求其中任意三个邻接点都不共线。换句话说，多角形是平

面上的一条封闭折线。有 n 个顶点、n 条边的多角形称为 n 角形(照字面上的意思，它是有 n 个角的图形)。除了 $n=3$ 4 两种情形外，n 角形常用希腊名称来称呼，如五角形是 pentagon($n=5$)，六角形是 hexagon($n=6$)，等等。对两种最简单的情形，则常用拉丁名称 triangle($n=3$) 和 quadrangle ($n=4$)，而不用 trigon 和 tetragon(但是 trigon 在三角学 trigonometry 一词中还留有痕迹)。自然，我们应该不支持、也不鼓励把四角形叫做“四边形”。(在射影几何里，边是指整条直线，而不只是线段；在表达不同的意思时，这两种术语常常都需要。)

四角形的两条边看它们是否有公共顶点，分别称为相邻的和相对的。同样，两个顶点是相邻的还是相对的，看它们是否属于同一条边。联结两个相对顶点的线段称为对角线。这样，四角形 $ABCD$ 的边是 AB, BC, CD, DA，对角线是 AC 和 BD。

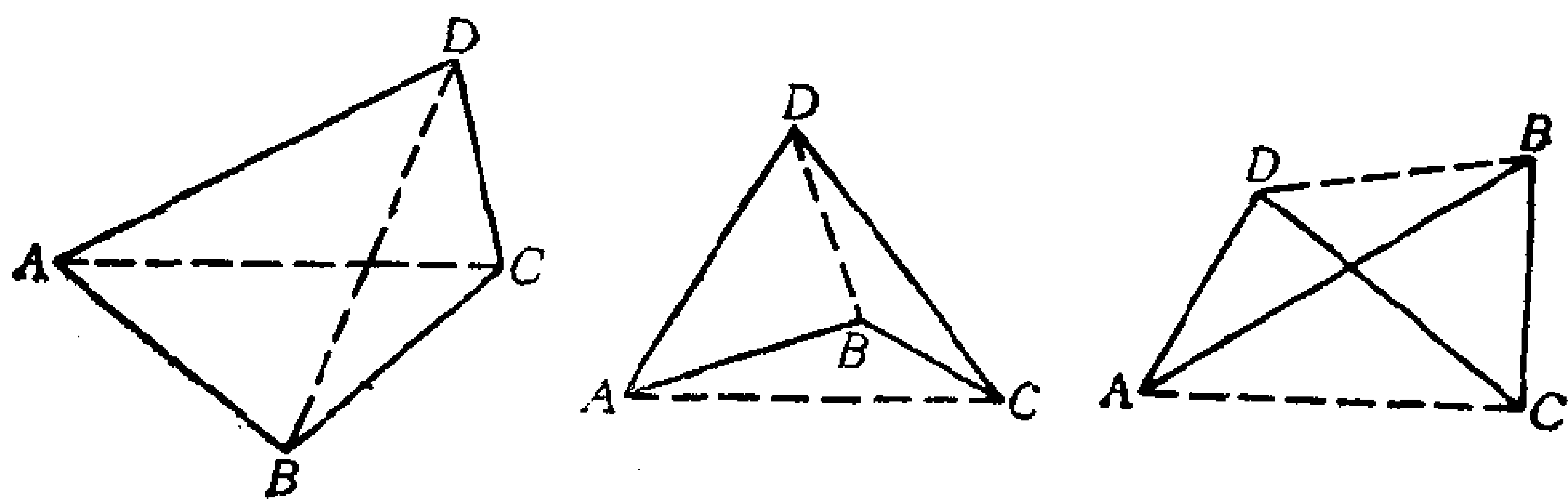


图 3.1A

在图3.1A中，我们看到了三个截然不同的四角形：凸四角形，它的两条对角线都在四角形的内部；凹四角形，它的一条对角线在内部，另一条对角线在外部；交叉四角形，两条对角线都在四角形的外部。

自然，凸四角形的面积定义为它的一条对角线所分成的

两个三角形的面积之和：

$$(ABCD)=(ABC)+(CDA)=(BCD)+(DAB).$$

要使上述公式对凹四角形也适用，必须把三角形的面积根据它的顶点的次序成反时针还是顺时针的旋转方向，分别规定为正值和负值．这样

$$(ABC)=(BCA)=(CAB)=-(CBA).$$

于是，图3.1 A 中间的那个凹四角形的面积是

$$(ABCD)=(BCD)+(DAB)$$
$$=(CDA)-(CBA)=(CDA)+(ABC).$$

最后，该公式还使我们把交叉四角形的面积看作构成四角形的两个小三角形的面积之差．

规定 $(ABC)=-(CBA)$，再加上有向线段的概念（§2.1），则塞瓦定理及其逆定理（1.2.1和1.2.2）的证明可以推广到点 X, Y, Z 以负分比截割 $\triangle ABC$ 的各边的情形，即 X, Y, Z 可以在 $\triangle ABC$ 的各边的延长线上．

下面的定理是属于瓦里农（P. Varignon，1654—1722）的．它是非常简单的，因此人们对这个定理迟至1731年才得以发表感到奇怪．

定理3.1.1 四角形各边的中点依次联结而成的图形是平行四边形，它的面积是原四角形面积的一半．

我们知道三角形两边中点的连线平行于第三边，并且等于第三边长度的一半．已知四角形 $ABCD$，设各边 AB, BC, CD, DA 的中点是 P, Q, R, S，如图3.1 B．考虑三角形 ABD 和 CBD，则 PS 和 QR 都平行于对角线 BD，且长度等于 $BD/2$．因此四角形 $PQRS$ 是平行四边形①；常常把它称作

① 如果 $ABCD$ 是挠四角形，即它的四个顶点不同在一个平面上，则 $PQRS$ 仍是平行四边形．

四角形 $ABCD$ 的瓦里农平行四边形。

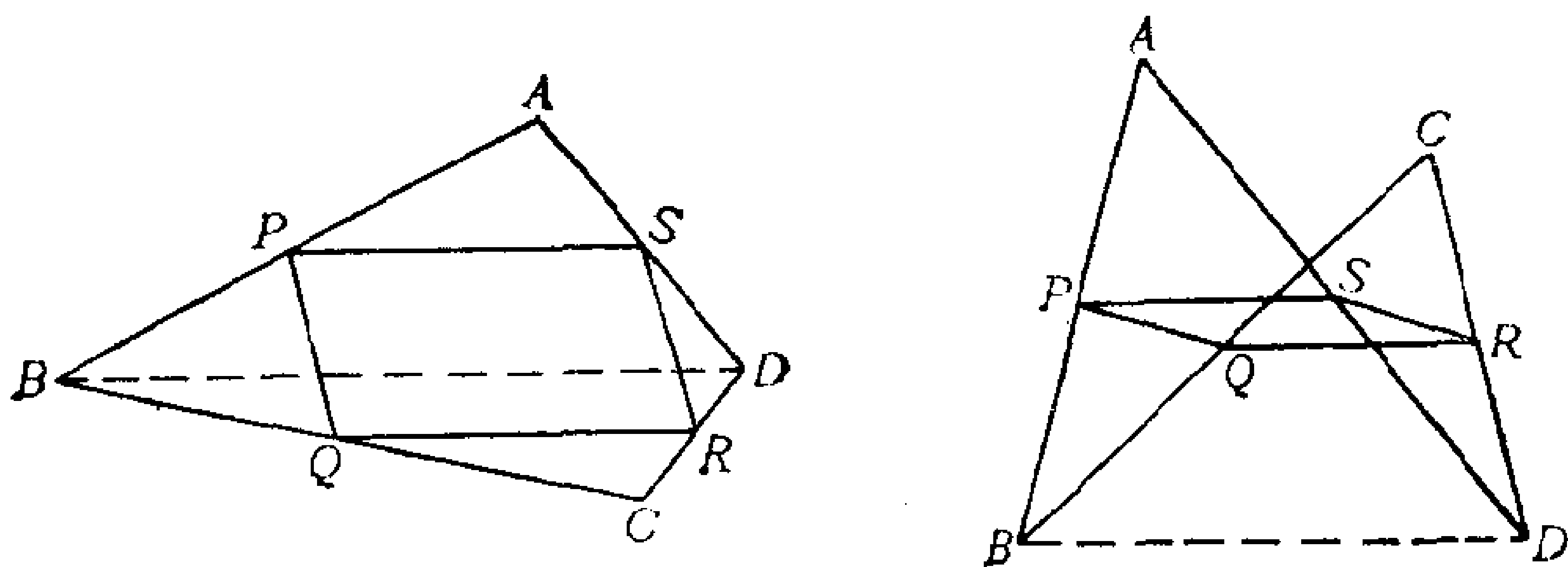


图 3.1B

至于面积，我们有

$$
\begin{aligned}
&(PQRS)\\
&=(ABCD)-(PBQ)-(RDS)-(QCR)-(SAP)\\
&=(ABCD)-\frac{1}{4}(ABC)-\frac{1}{4}(CDA)-\frac{1}{4}(BCD)\\
&\quad-\frac{1}{4}(DAB)\\
&=(ABCD)-\frac{1}{4}(ABCD)-\frac{1}{4}(ABCD)=\frac{1}{2}(ABCD)
\end{aligned}
$$

读者最好自己画一个凹四角形 $ABCD$，并且验证上面的分解式仍然是成立的。

因为平行四边形的对角线互相平分，所以 PR 和 QS 的中点和瓦里农平行四边形的中心是一致的（即图3.1C的点 O）。同理，AD 和 BC 又是四角形 $ABDC$ 的对角线。因为 PR 的中点是唯一的，所以新的四角形 $ABDC$ 的瓦里农平行四边形 $PYRX$ 也以 O 为中心。因此得到

定理3.1.2 四角形两组对边中点的连线和对角线中点

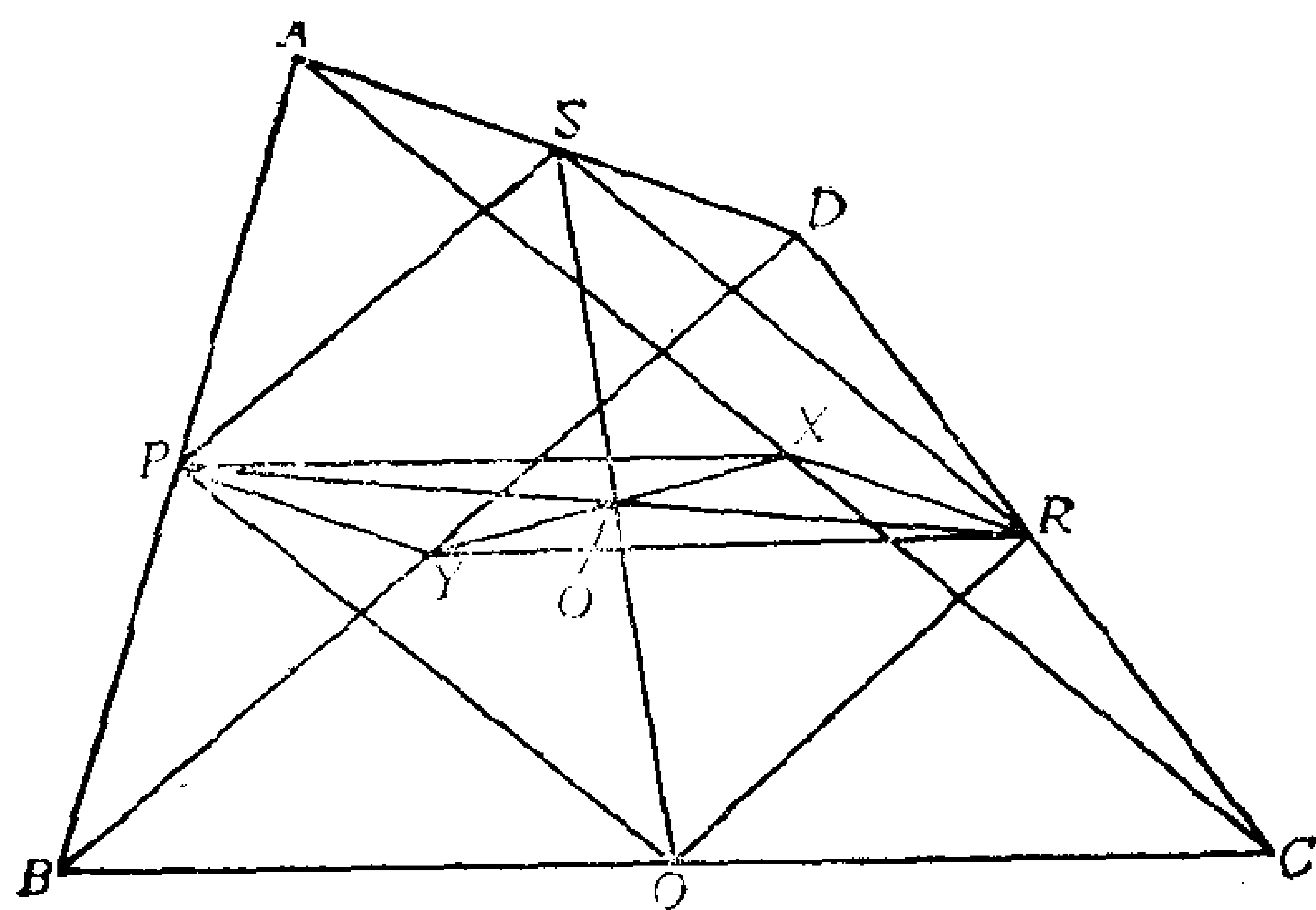


图 3.1C

的连线是共点的，并且它们彼此平分。

(这是我们要讲的关于共点性的第一个定理)。

下面的结果是很有用的。

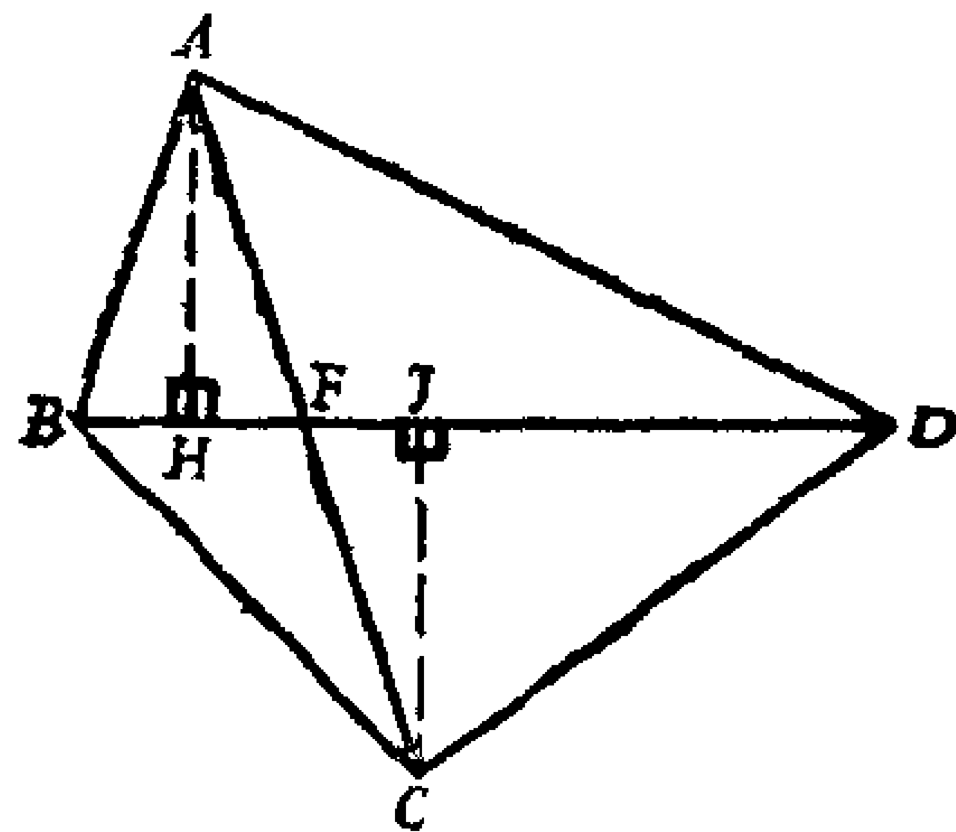


图 3.1D

定理3.1.3 如果一条对角线把四角形分成面积相等的两个三角形，则它必平分另一条对角线。反之，若一条对角线平分另一条对角线，则它必平分四角形的面积。

为说明理由，假定 BD 把 $ABCD$ 分成面积相等的两个三角形 DAB 和 BCD，如图3.1D。因为这两个三角形的"底"相同，它们的高线 AH 和 CJ 也相等。从全等三角形 AHF 和 CJF 得到 $AF=CF$。反之，如果 $AF=CF$，则三角形 AHF 和 CJF 全等，$AH=CJ$，故$(DAB)=(BCD)$。

现在我们要证明本节的最后一个定理：

定理3.1.4 设四角形 $ABCD$ 的对边 AD 和 BC（延长）相交于W，且X和Y是对角线 AC 和 BD 的中点，则$(WXY)=(ABCD)/4$。

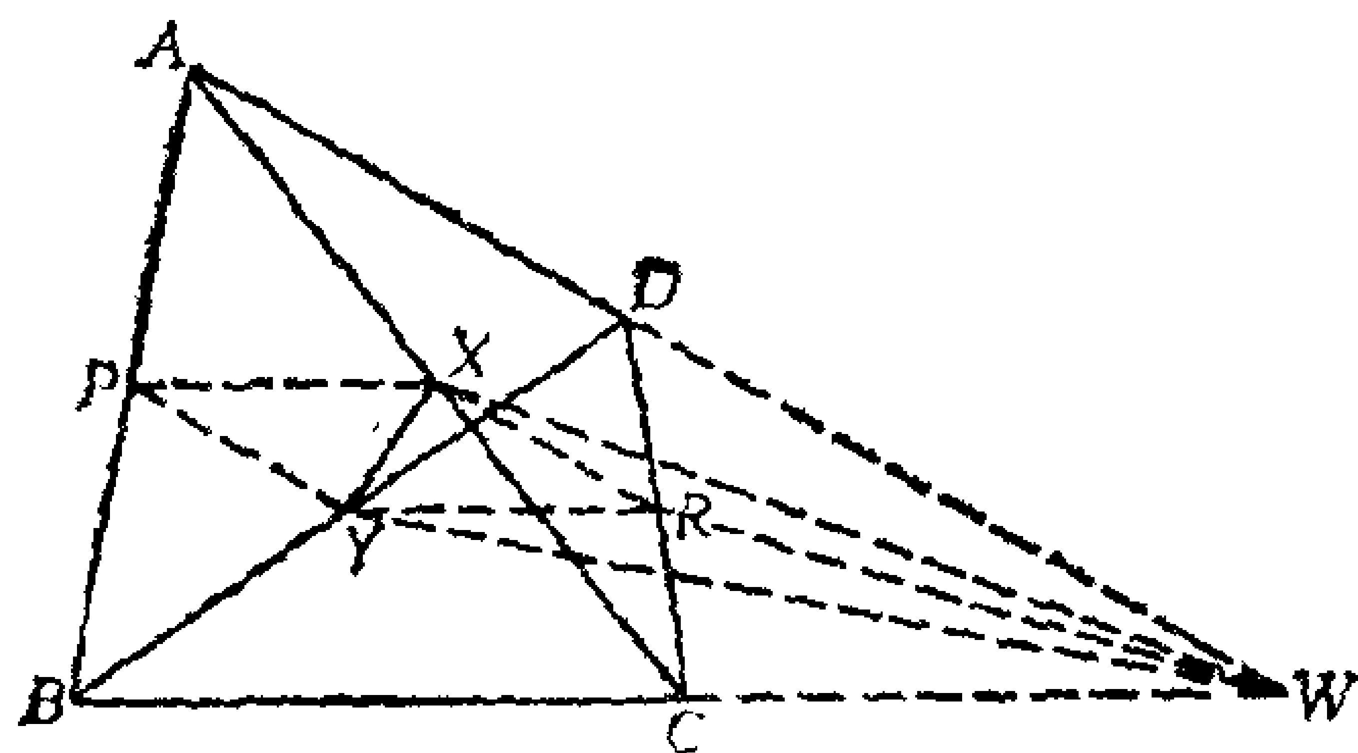


图 3.1E

如图3.1E，添上 AB 和 CD 的中点P和 R，画出 PX, PY, RX, RY, RW。三角形 BCD 的两边中点的连线 RY 平行于 BC 且平分四角形 $DYWR$ 的"另"一条对角线 DW。因此，由定理3.1.3的后一个结论得

$$(RYW)=(YRD)=\frac{1}{4}(BCD).$$

类似地有

$$(RWX)=\frac{1}{4}(CDA).$$

把瓦里农定理用于四角形 $ABDC$，则

$$\begin{aligned}(RXY)&=\frac{1}{2}(PYRX)=\frac{1}{4}(ABDC)\\&=\frac{1}{4}(CAB)+\frac{1}{4}(BDC)\\&=\frac{1}{4}(ABC)-\frac{1}{4}(BCD).\end{aligned}$$

把上面三式相加便得到

$$(WXY)=(RXY)+(RYW)+(RWX)$$

$$=\frac{1}{4}(ABC)-\frac{1}{4}(BCD)+\frac{1}{4}(BCD)+\frac{1}{4}(CDA)$$

$$=\frac{1}{4}(ABC)+\frac{1}{4}(CDA)=\frac{1}{4}(ABCD).$$

习　题

1．瓦里农平行四边形的周长等于原四角形的对角线之和。

2．任意一个四角形各边的平方和等于对角线的平方和加上对角线中点连线的平方的4倍。

3．平行四边形各边的平方和等于它的对角线的平方和。

4．若等腰梯形的腰长为a，平行边的长为b和c，对角线的长为d，则$d^2=a^2+bc$。

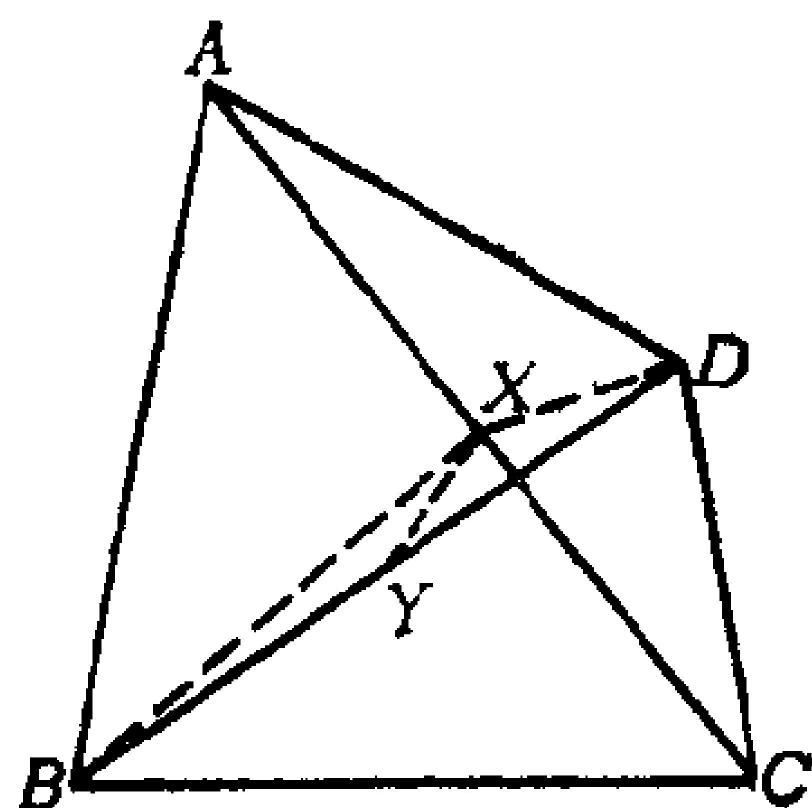


图 3.1F

§3.2 圆内接四角形．布拉马古普塔公式

我们把V个顶点中，若干对点联结而得到的E条线段的集合看作一个“构件”，并把这些线段看作限制在平面上能够以它们的端点为支轴进行活动的刚硬的杆．显然，三角形($E=V=3$)是刚性的，而四角形($E=V=4$)有一个自由度：它有一个角可以增大或减小，而其余各角则随着变化．一个构件称为“恰好刚性”的，如果它本身是刚性的，并且在任意去掉一个杆之后，它就不再是刚性的了．莱姆(H. Lamb)给出了构件是恰好刚性的一个必要条件的简单证明[19,pp. 93—94]．该条件是

$$E = 2V - 3.$$

(要指出的是,这个条件并不是恰好刚性的充分条件。)例如,$E=5$, $V=4$。这时我们得到附带一条对角线的四角形;去掉这条对角线就为四角形提供了前面所说的自由度。

若四条线段 a, b, c, d 中,每一条的长度都小于其余三条的和,则它们能作为一个凸四角形的边。四角形的自由度使我们能够增大或减小两个相对的角,最终使这两个角互补。此刻,这四个顶点便落在同一个圆上。假定这样一个圆内接四角形的对角线是 l 和 n(如图3.2A的第一个图)。将这个四角形 $abcd$ 沿对角线 l 剖开,把三角形 dal 翻转后,再把它们拼起来,我们便得到内接于同一个圆的新的四角形 $bcad$,它有一条对角线仍是 l,把圆内接四角形 $bcad$ 沿另一条对角线 m 剖开,然后翻转三角形 dbm,再把它们拼起来,于是我们得到内接于同一个圆的第三个四角形 $cabd$(如图3.2A的最后一个图)。因为第三个四角形还可以从第一个四角形沿对角线 n 剖开而得到,所以它的对角线是 m 和 n,并且不可能再有其它的这种变换(除非把 $abcd$ 整个地翻转成 $dcba$)。根据托勒密定理(即定理2.6.1),我们有

$$mn = bc + ad, \qquad nl = ca + bd, \qquad lm = ab + cd.$$

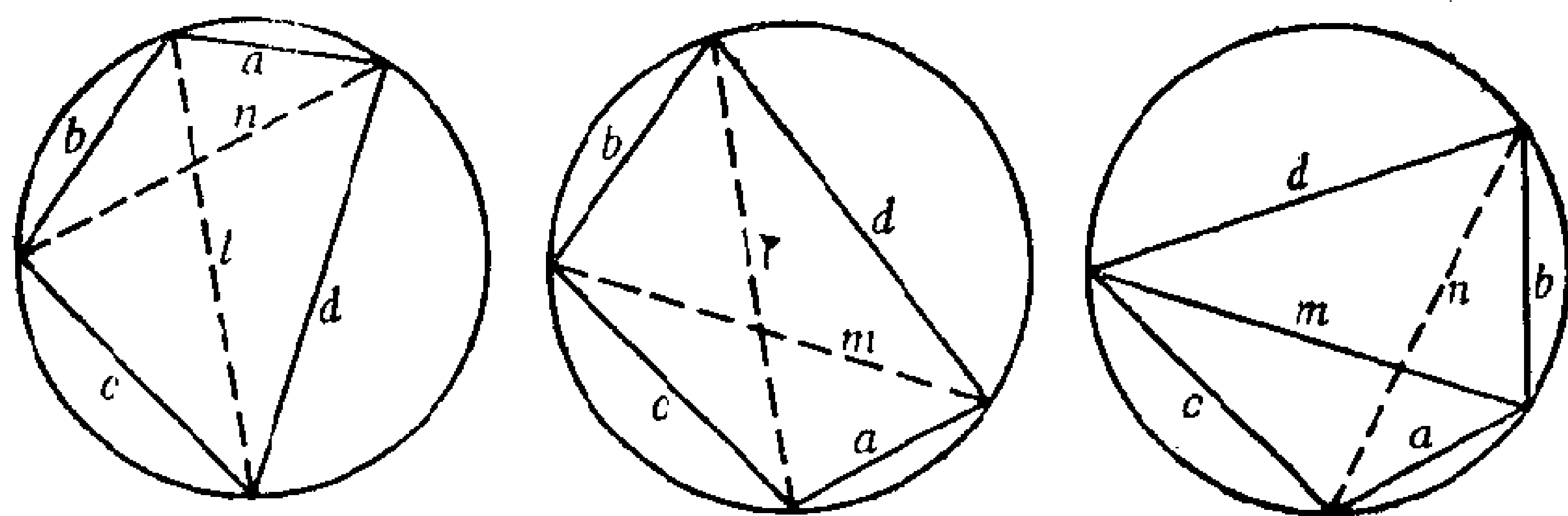


图 3.2A

因为这些四角形都是凸的，每一个四角形的面积都是两个三角形的正面积之和。用上面的方式翻转三角形，不改变它的正面积，因此，这三个四角形的面积相等（显然，其中每两个四角形都不全等，除非在 a，b，c，d 四条边中有两条一样长）。我们把以上的讨论总结成下面的命题：

定理3.2.1 任意四条不等长的线段，如果每一条都小于另外三条之和，则它们可以作为内接于同一个圆的三个不同的四角形的边，并且这三个四角形有相同的面积。

推论 圆内接四角形的面积是它的四条边的对称函数。

这个对称函数的确切表达式是印度数学家布拉马古普塔(Brahmagupta)在公元七世纪发现的：

定理3.2.2 若圆内接四角形的各边是 a，b，c，d，半周长是 s，则它的面积 K 满足

$$K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

推导布拉马古普塔公式的一个最简单的方法是运用三角学。如图3.2B，考虑圆内接四角形 $abcd$，E 是属于 a 和 b 的顶点，F 是属于 c 和 d 的顶点，n 是联结另外两个顶点的对角线。（我们把四角形在 E 和 F 处的内角简记为 E 和 F）。因为 $E+F=180°$，所以

$$\cos F=-\cos E,\qquad \sin F=\sin E.$$

由余弦定律得

$$a^2+b^2-2ab\cos E=n^2=c^2+d^2-2cd\cos F.$$

因此

$$2(ab+cd)\cos E=a^2+b^2-c^2-d^2. \qquad (3.2.2.1)$$

因为

$$K=\frac{1}{2}ab\sin E+\frac{1}{2}cd\sin F=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin E,$$

故

$$2(ab+cd)\sin E=4K。\qquad (3.2.2.2)$$

把(3.2.2.1)和(3.2.2.2)两式平方再相加，则得

$$4(ab+cd)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16K^2,$$

因此

$$16K^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2。$$

反复利用恒等式 $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$，我们求得

$$\begin{aligned}16K^2&=[2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&\quad\times[2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&=[c^2+2cd+d^2-a^2+2ab-b^2]\\&\quad\times[a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2]\\&=[(c+d)^2-(a-b)^2]\times[(a+b)^2-(c-d)^2]\\&=[(c+d-a+b)(c+d+a-b)]\\&\quad\times[(a+b-c+d)(a+b+c-d)]\\&=(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d),\end{aligned}$$

其中$2s=a+b+c+d$，这就证明了定理。

在定理3.2.2中，若命 $d=0$，则得到用边长 a，b，c 及半周长 s 表示三角形面积的海伦公式：

$$(ABC)^2=s(s-a)(s-b)(s-c)。$$

尽管这个公式冠以亚历山大里亚的海伦(Heron,约公元60年)的名字，但是范德瓦尔登(van der Waerden)[28,P.228,227] 支持贝尔[2,P.58]的主张，把它归功于阿基米德（Archimedes，公元前三世纪)。

布拉马古普塔的另一个发现涉及一类特殊的圆内接四角形：

定理3.2.3 若一个圆内接四角形的对角线互相垂直，相交于P点，则从P向任意一边所引的垂线必平分该边的对

边。

参看图3.2C，圆内接四角形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 互相垂直，直线 PH 垂直于 BC，并与 DA 相交于X，则我们有

$$\angle DPX=\angle BPH=\angle PCH=\angle ACB=\angle ADB=\angle XDP.$$

因此，三角形 XPD 是等腰的。同理，三角形 XAP 也是等腰三角形。所以

$$XA=XP=XD.$$

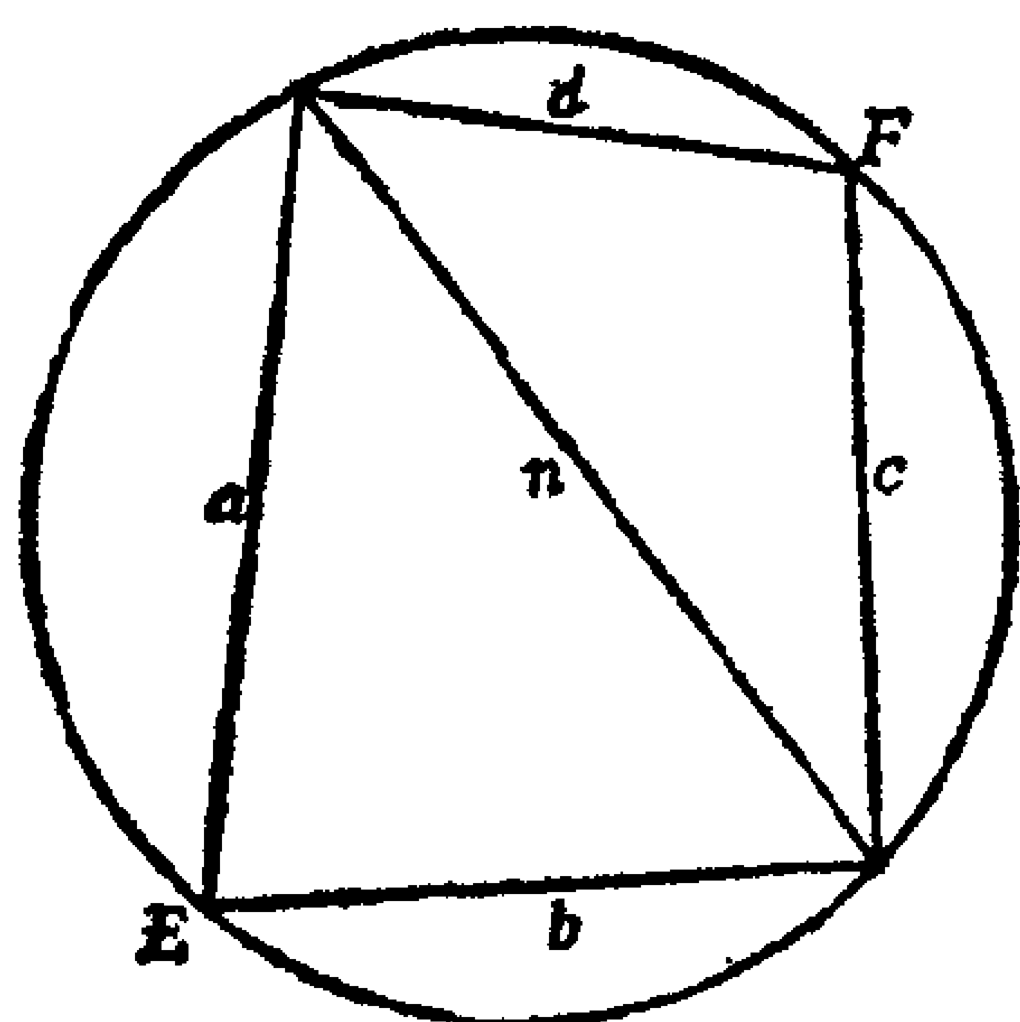


图 3.2B

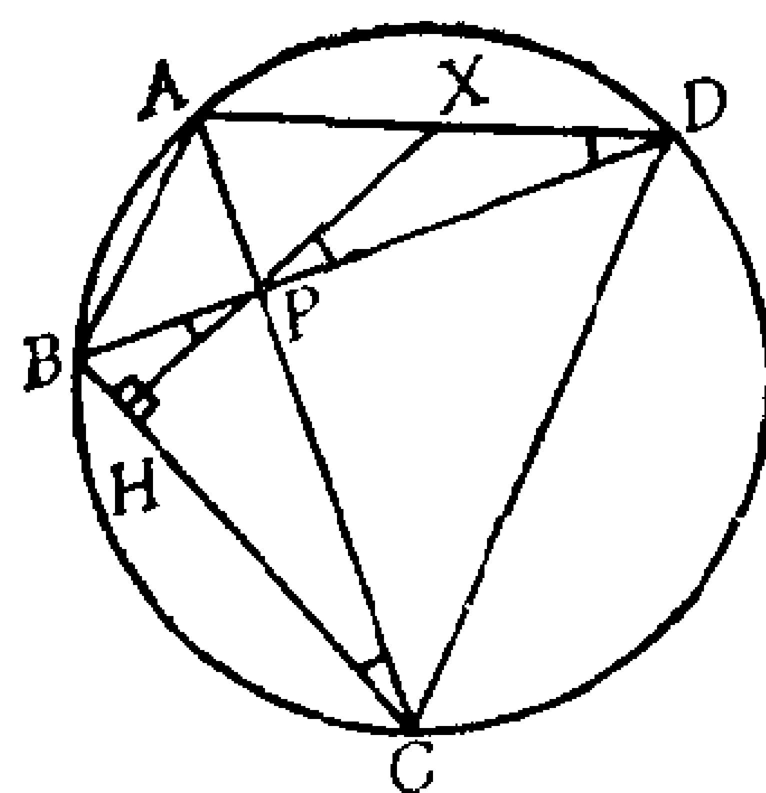


图 3.2C

习　题

1. 若边为 a, b, c, d 的圆内接四角形又是另一个圆的外切四角形，则它的面积K适合 $K^2=abcd$。

2. 用海伦公式求三角形的面积，设其边长是

(i) 13, 14, 15;　　　(ii) 3, 14, 15.

3. 用 $s, s-a, s-b, s-c$ 表示三角形的内切圆半径。

4. 若用§1.4的记号，则有

$$r_a+r_b+r_c-r=4R, \qquad 且 (I_aI_bI_c)=2sR.$$

5. 若用图3.2A的记号，则$K=\frac{lmn}{4R}$.

6. 若命$d=0$，则第5题的结果将是什么？

7. 若以a,b,c,d为边的凸四角形内接于圆，则其面积K的平方是

$$K^2=\frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}.$$

8. 设圆内接四角形的两条对边延长相交于V，另外两条对边延长相交于W，则角V和W的平分线彼此垂直。

9. 将矩形$ABCD$的平面上任意一点P分别与四个顶点联结成线段，则$PA^2-PB^2+PC^2-PD^2=0$.

10. 若四角形内接于圆，则圆上一点到四角形两条对边的距离之积等于该点到另外两条对边的距离之积，也等于它到两条对角线的距离之积。

§3.3 拿破仑三角形

现在我们来考察由三角形和四角形构作的某些图形。一个意外地被忽略的、然而是容易的定理如下：

定理3.3.1 在三角形的各条边上分别向外作三角形，使所得的三个三角形的各"较远"的角之和等于180°，则这三个三角形的外接圆共点。

（这是又一个关于共点性的定理！）证明是非常简单的。如图3.3A，在已知三角形ABC的各条边上，向外作三角形CBP，ACQ，BAR，使得在P,Q,R的角满足条件$P+Q+R=180°$。现在，三角形CBP和ACQ的外接圆已有公共点C，设另一个公共点是F。把F分别与A,B,C联结起来，则有

$$\angle BFC=180°-P,\qquad \angle CFA=180°-Q,$$

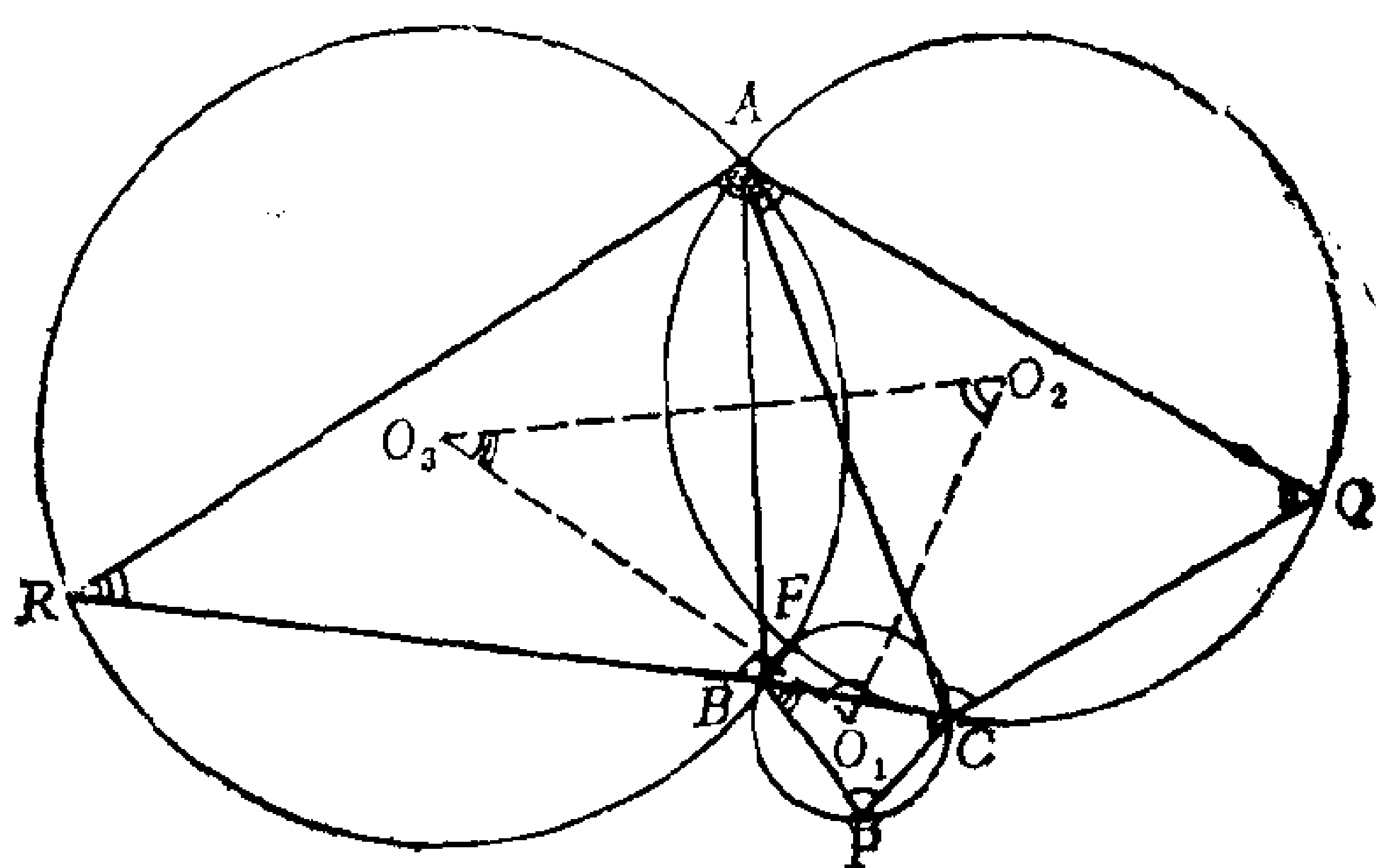


图 3.3A

故

$$\angle AFB = 360° - (\angle BFC + \angle CFA)$$
$$= 360° - (180° - P + 180° - Q)$$
$$= P + Q = 180° - R.$$

因此，F 又落在$\triangle BAR$ 的外接圆上，即这三个三角形的外接圆共点。

有两个特殊情形是特别有趣的:

定理3.3.2 若$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 分别落在$\triangle PQR$ 的边 QR, RP, PQ 上，则三个圆 CBP, ACQ, BAR 有一个公共点。

定理3.3.3 若相似三角形 PCB, CQA, BAR 分别落在$\triangle ABC$ 的各边的外侧，则这三个三角形的外接圆有一个公共点。(要注意，根据我们为相似三角形的顶点命名的次序，在 P, Q, R 的角不是这些三角形的对应角。)

弗德(Forder)把定理3.3.2称作比沃特(Pivot)定理[13,P.17]，它是米吉尔 (A.Miquel) 在 1838 年发现的。为了和图 1.9 A 一致起见，我们把 $PQRABC$ 改记为 $ABCA_1B_1C_1$，则可以

同样容易地证明在形式上稍有推广的定理：设 ABC 是一个三角形，A_1,B_1,C_1分别是在直线 BC,CA,AB 上的任意点，则三个圆 AB_1C_1,A_1BC_1,A_1B_1C 有一个公共点 P。当这些圆分别以 AP,BP,CP 为直径时，则$\triangle A_1B_1C_1$ 恰好是$\triangle ABC$关于点P的垂足三角形。若让$\triangle ABC$ 和P点保持不动，而让直线 PA_1,PB_1,PC_1绕"轴心" P同时转过一个任意角，于是得到一个"斜足三角形" $A_1B_1C_1$。显然圆 AB_1C_1,A_1BC_1，A_1B_1C 仍旧通过点 P。

要求 A_1,B_1,C_1构成一个三角形是多余的：如图2.5 A，这三点可以共线。这时，A_1,B,C 是直线 B_1C_1,C_1A,AB_1上的三个点，而定理说三个圆 ABC,A_1B_1C,A_1BC_1，有一个公共点。但是后两个圆的交点是 A_1和 P，于是我们证明了

定理3.3.4 若四条直线彼此相交成六个点 A,B,C,A_1，B_1,C_1，使 $A_1BC,AB_1C,ABC_1,A_1B_1C_1$分别是共线点组，则四个圆 AB_1C_1,A_1BC_1,A_1B_1C 和 ABC 有一个公共点。

如果前三个圆分别以 AP,BP,CP 为直径，则 A_1B_1 就是点P关于$\triangle ABC$ 的西姆松线。若保持 ABC 和 P 点不动，把三条直线 PA_1,PB_1,PC_1 同时绕P点转过一个任意角，则得到一条"斜西姆松线"。这条直线包含斜足 A_1,B_1,C_1，而直线 PA_1,PB_1,PC_1与 BC,CA,AB 分别成等角(并有相同的旋转方向)。

定理3.3.3 有一个关于圆心三角形 $O_1O_2O_3$ (图3.3 A)的有趣的推论。因为这个三角形的边 O_2O_3,O_3O_1,O_1O_2分别垂直于相应的圆对的公共弦(或根轴)，它在 O_1的内角必定是$\angle BFC$ 的补角，故 $O_1=P$。同理，$O_2=Q$，$O_3=R$。它们正好是三个相似三角形的三个不同的内角。因此有

定理3.3.5 若在任意三角形 ABC 的各边向外作相似三

角形 PCB, CQA, BAR，则它们的外心构成的三角形与这三个三角形相似。

特别地(图3.3B)，我们有

定理3.3.6 若在任意三角形的各边向外作等边三角形，则它们的中心构成一个等边三角形。

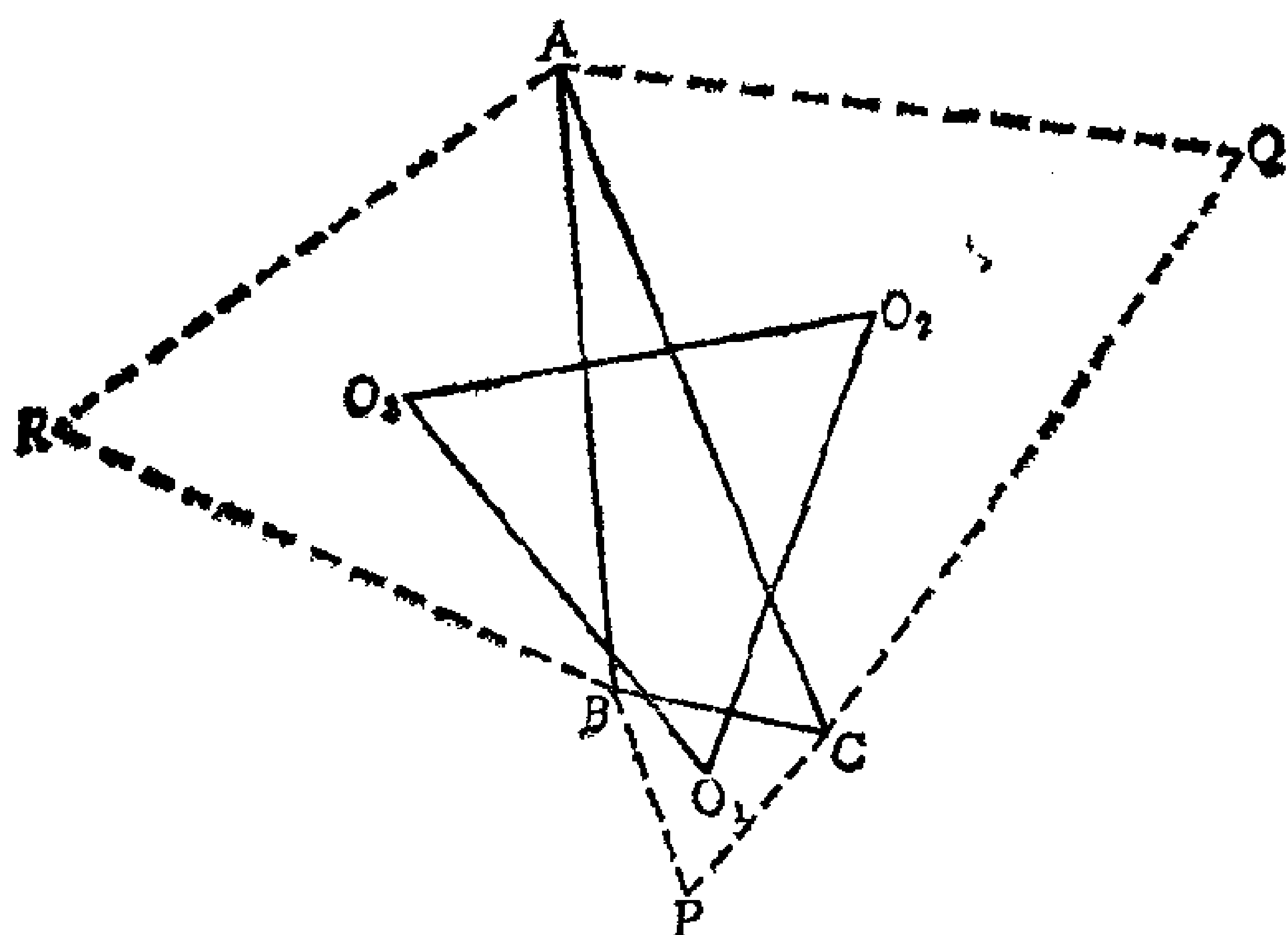


图 3.3B

我们知道，拿破仑(Napoleon)还称得上是一位对几何学有浓厚兴趣的数学家。事实上，有这样一个故事：在他成为法国的统治者之前，他设法和大数学家拉格朗日(Lagrange)和拉普拉斯(Laplace)进行讨论，直到后者严肃地告诉他："将军，我们从你那里得到的只是几何学中的戒律"。拉普拉斯后来成为拿破仑的首席军事工程师。

定理3.3.6已归在拿破仑的名下，虽然他是否具备足够的几何学知识作出这项贡献，如同他是否有足够的英语知识写出著名的迴文

"ABLE WAS I ERE I SAW ELBA"

一样是值得怀疑的。

无论如何，当PCB, CQA, BAR是等边三角形时，把它

们的中心所构成的三角形$O_1O_2O_3$称作$\triangle ABC$的外拿破仑三角形是方便的。同样，若等边三角形作在$\triangle ABC$的各边的内侧，如图3.3C，则它们的中心所构成的三角形叫做内拿破仑三角形。于是，定理3.3.6可以简述为：

外拿破仑三角形是等边三角形

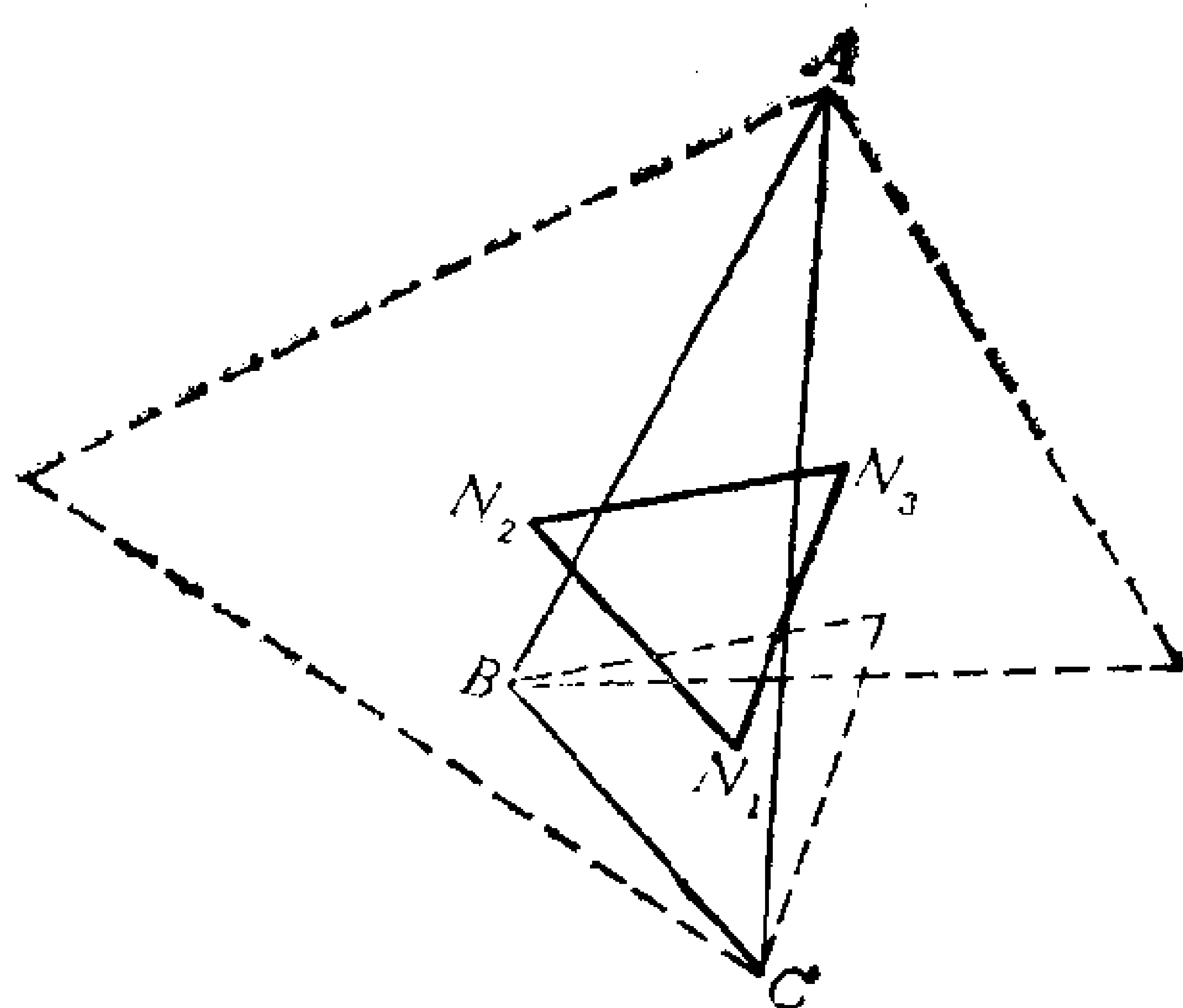


图 3.3C

亚格龙(Yaglom)用完全不同的方法证明了这个定理，他的方法的好处是同时证明了类似的

定理3.3.7 内拿破仑三角形是等边三角形。

另一种方法是把余弦定律用于图3.3B的三角形AO_3O_2，这种方法同时给出了一个有趣的副产品。因为AO_2是边长为$CA=b$的等边三角形的外接圆半径，故它的长度是$b/\sqrt{3}$.同理，$AO_3=c/\sqrt{3}$。此外，

$$\angle O_3AO_2=A+60°,$$

所以 $$(O_2O_3)^2=\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{3}bc\cos(A+60°).$$

因为内拿破仑三角形的顶点N_2,N_3可以从O_2,O_3分别关于直线CA和AB作反射得到，故有

$$(N_2N_3)^2=\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{3}bc\cos(A-60°).$$

两式相减得

$$(O_2O_3)^2-(N_2N_3)^2$$

$$=\frac{2}{3}bc[\cos(A-60°)-\cos(A+60°)]$$

$$=\frac{4}{3}bc\sin A\sin 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}bc\sin A$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}(ABC).$$

同理得 $$(O_1O_2)^2-(N_1N_2)^2=\frac{4}{\sqrt{3}}(ABC).$$

因为 $O_2O_3=O_3O_1=O_1O_2$，所以

$$N_2N_3=N_3N_1=N_1N_2.$$

我们知道等边三角形的面积是其边长平方的$\sqrt{3}/4$倍，于是“有趣的副产品”是

定理3.3.8 任意一个三角形的外拿破仑三角形与内拿破仑三角形的面积之差是(ABC)。

实际上，内拿破仑三角形是“逆行的”（见图3.3C），所以$(N1N_2N_3)$是负的（或零），确切的公式不是

$$(O_1O_2O_3)-(N_1N_2N_3)=(ABC),$$

而应该是 $$(O_1O_2O_3)-(N_3N_2N_1)=(ABC),$$

或者 $$(O_1O_2O_3)+(N_1N_2N_3)=(ABC).$$

习　题

1.若在三角形的两条边向外各作正方形，则这两个正方形的外接圆的另一个交点在以第三边为直径的圆上，并且这三个圆的圆心构成一个等腰直角三角形。

2.用图3.3B的记号，证明

(i) 直线PO_1, QO_2, RO_3都经过$\triangle ABC$的外心O。

(ii) 直线AO_1, BO_2, CO_3共点。

(iii) 线段AP, BQ, CR的长度相等，并且都经过这三个圆的公共点F，彼此相交成60°。(该点之所以命名为F，是因为费马在$\triangle ABC$的各内角不超过120°时证明了：平面上一点到A, B, C的距离之和在该点达到最小值。)

3.用图3.3C的记号，证明直线AN_1, BN_2, CN_3共点。

4. 外拿破仑三角形和内拿破仑三角形有同一个中心。

§3.4 梅内劳斯定理

亚历山大里亚的梅内劳斯(Menelaus，约公元100年，他和斯巴达的Menelaus是两个人)写过一本教程《球面几何》，其中用到了球面三角形的一个性质。从他的叙述来看，似乎平面上三角形的一个类似的性质已经是熟知的。也许事实正是如此。因为没有更早的记录可查，我们暂且把表述该性质的命题称为梅内劳斯定理。采用有向线段的记法(§2.1)，该定理可以叙述成(看图3.4A, B)：

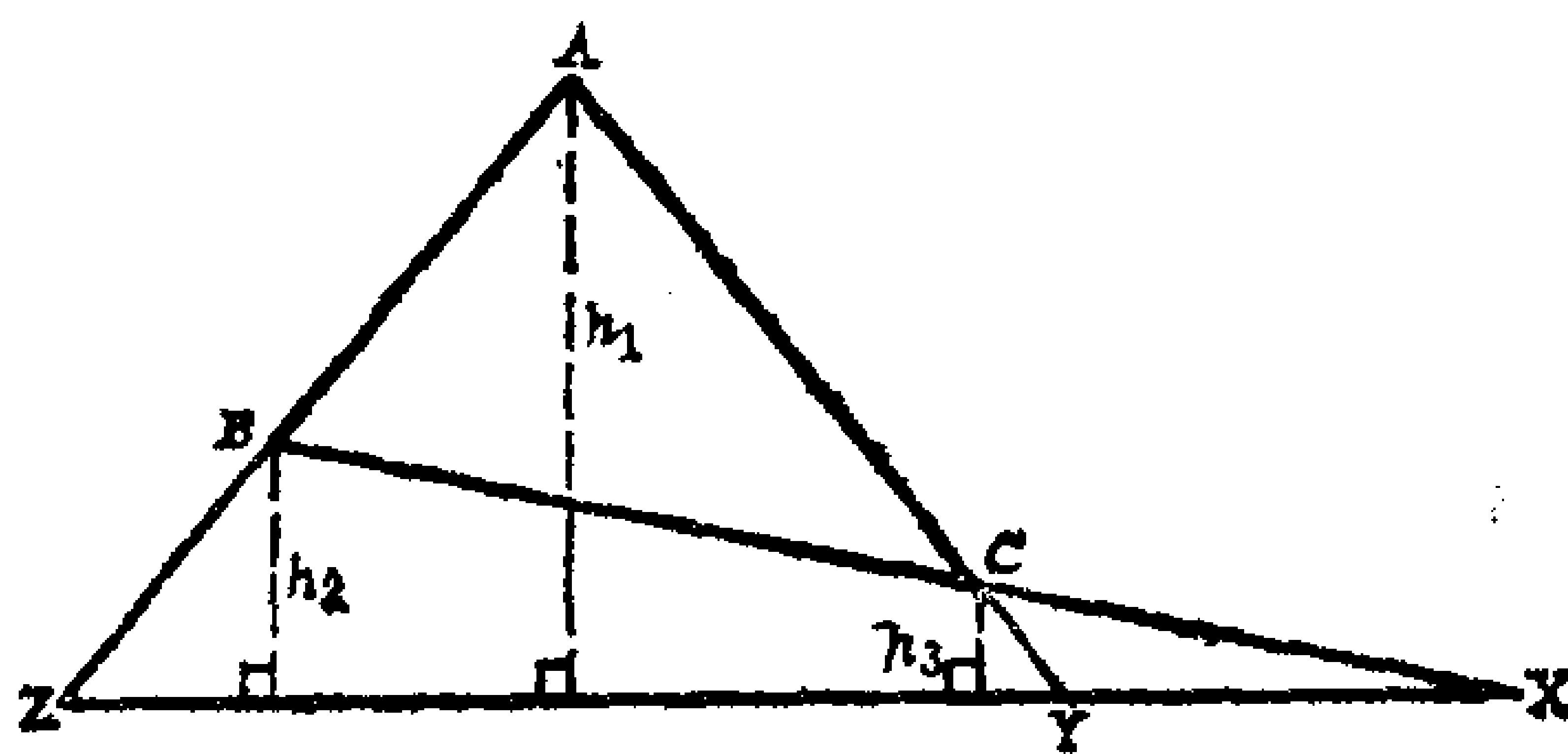


图 3.4A

定理3.4.1 若在$\triangle ABC$的三条边BC, CA, AB(或它们的延长线)上的三点X, Y, Z是共线的，则

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1.$$

反之，若分别在三边上的点X,Y,Z,使上述方程成立，则这三点共线。

如图3.4A和B，已知X,Y,Z共线，设h_1,h_2,h_3是从A,B,C到直线XY的垂线的长度，假定该长度在这条直线的一侧是正的，在它的另一侧是负的。从方程

$$\frac{BX}{CX}=\frac{h_2}{h_3},\quad \frac{CY}{AY}=\frac{h_3}{h_1},\quad \frac{AZ}{BZ}=\frac{h_1}{h_2}$$

便可得到所要的结果。(注意，要在$\triangle ABC$的三条边上取三个不同的共线点X,Y,Z，则必须把这三条边都延长，或者延长其中一条边。)

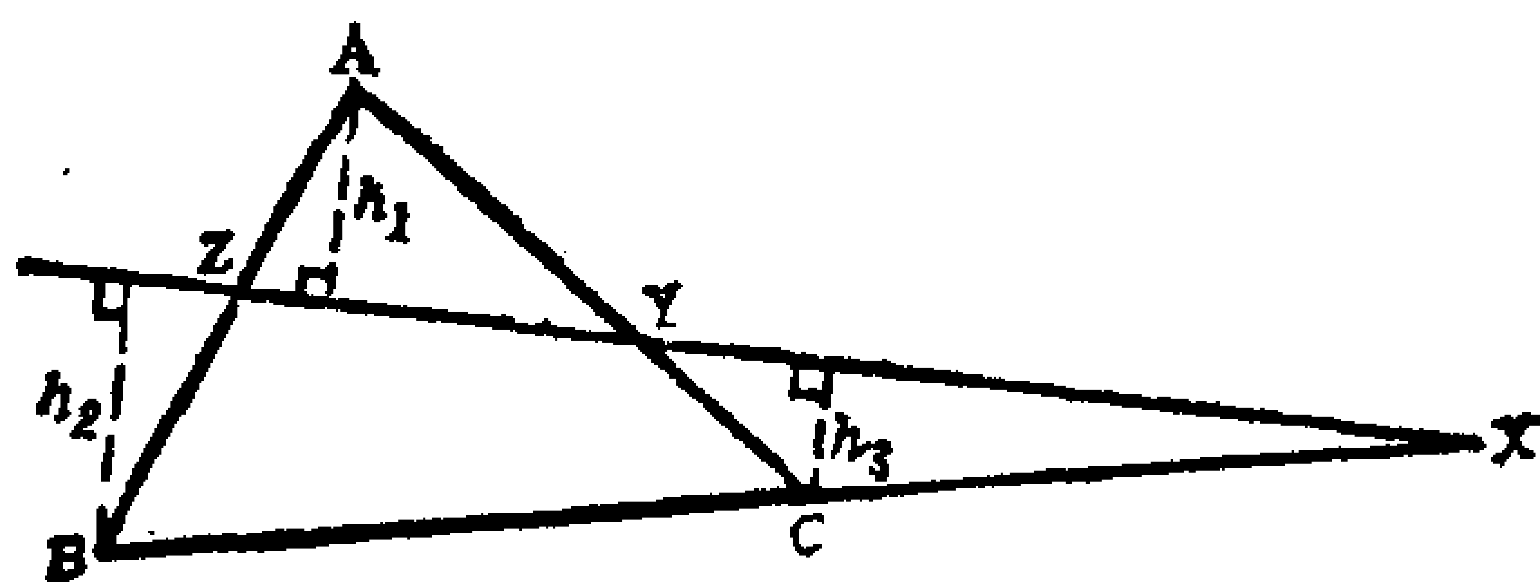


图 3.4B

反之，设X,Y,Z是分别在三条边上的点，并且满足条件

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1.$$

假定直线AB和XY交于Z',则

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ'}{BZ'}=1.$$

因此 $$\frac{AZ'}{BZ'}=\frac{AZ}{BZ},$$

即 Z' 和 Z 重合，因此 X,Y,Z 共线。

由此可见，塞瓦定理(定理1.2.1,定理1.2.2)提供了共点性的判别准则，而梅内劳斯定理恰好提供了共线性的判别准则。为了突出这两者之间的对应关系，我们可以把梅内劳斯方程改写成

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1.$$

习　题

1. 不等边三角形的三个角的外角平分线与对边的交点是共线的三个点。

2. 不等边三角形的两个内角平分线及第三角的外角平分线与对边的交点是共线的三个点。

§3.5 帕普斯定理

我们现在要讲的是平面几何学中最重要的定理之一。它最先是由亚历山大里亚的帕普斯(Pappus)在大约公元300年证明的，但是它作为射影几何学的基础的地位直到十六世纪后半叶才被认识到。帕普斯被称为古代最后一位大几何学家是当之无愧的。帕普斯定理有各种不同的叙述方式，其中之一是

定理3.5.1 设 A,C,E 是一条直线上的三个点，B,D,F 是另一条直线上的三个点，如果直线 AB,CD,EF 分别与 DE,FA,BC 相交，则这三个交点 L,M,N 共线。

这个定理的“射影”性质表现在，它纯粹是关联性定理，不涉及长度和角度，甚至于与顺序无关：在一组共线点中，哪一点落在另外两点之间是无关紧要的。图3.5A是按一种方式画出的，而图3.5B是按另一种方式画出的。如果适当地重新命名L,M,N，则可将字母A,B,C,D,E,F作任意的轮换。为了避免考虑无穷远点（因为这样做，会把我们朝射影几何的方向引得太远了），假定三条直线AB,CD,EF构成一个三角形UVW，如图3.5C。把梅内劳斯定理用于在三角形UVW的各边上的五个三点组

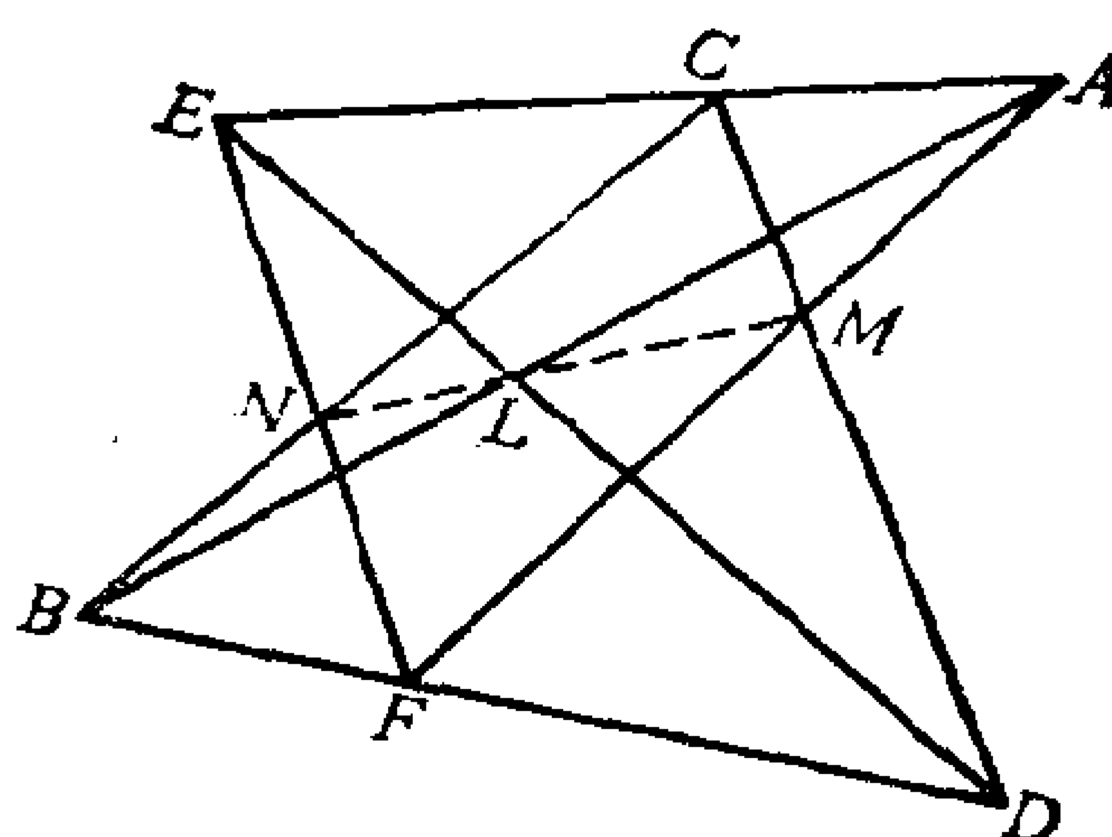


图 3.5A

$$LDE,\quad AMF,\quad BCN,\quad ACE,\quad BDF,$$

得到

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$

$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1,$$

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,$$

$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1.$$

把前三式相乘再除以后两式的乘积，化简后便有

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,$$

因此 L,M,N 是共线的，此即所要证的结果[17, P.237]．

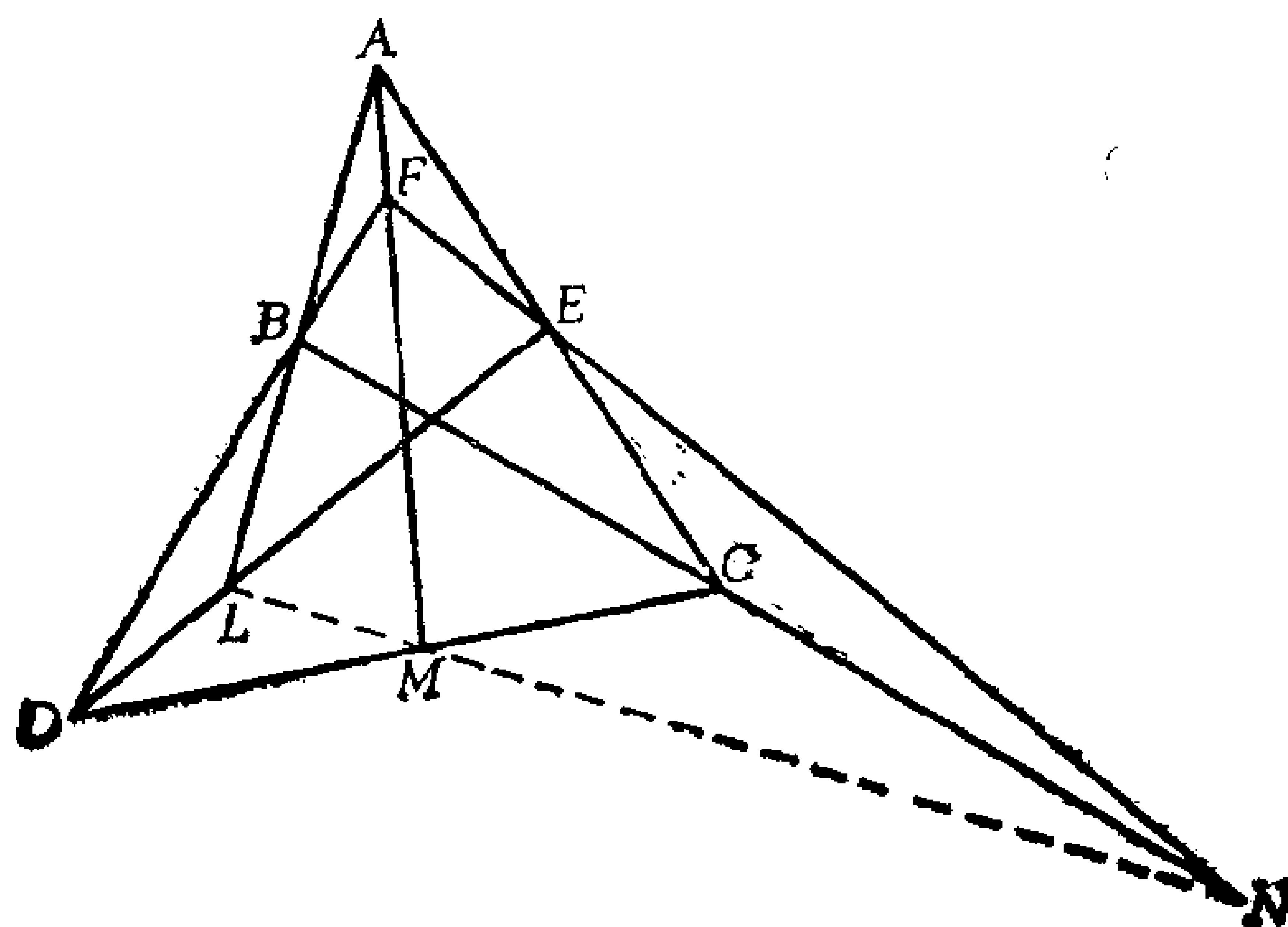


图 3.5B

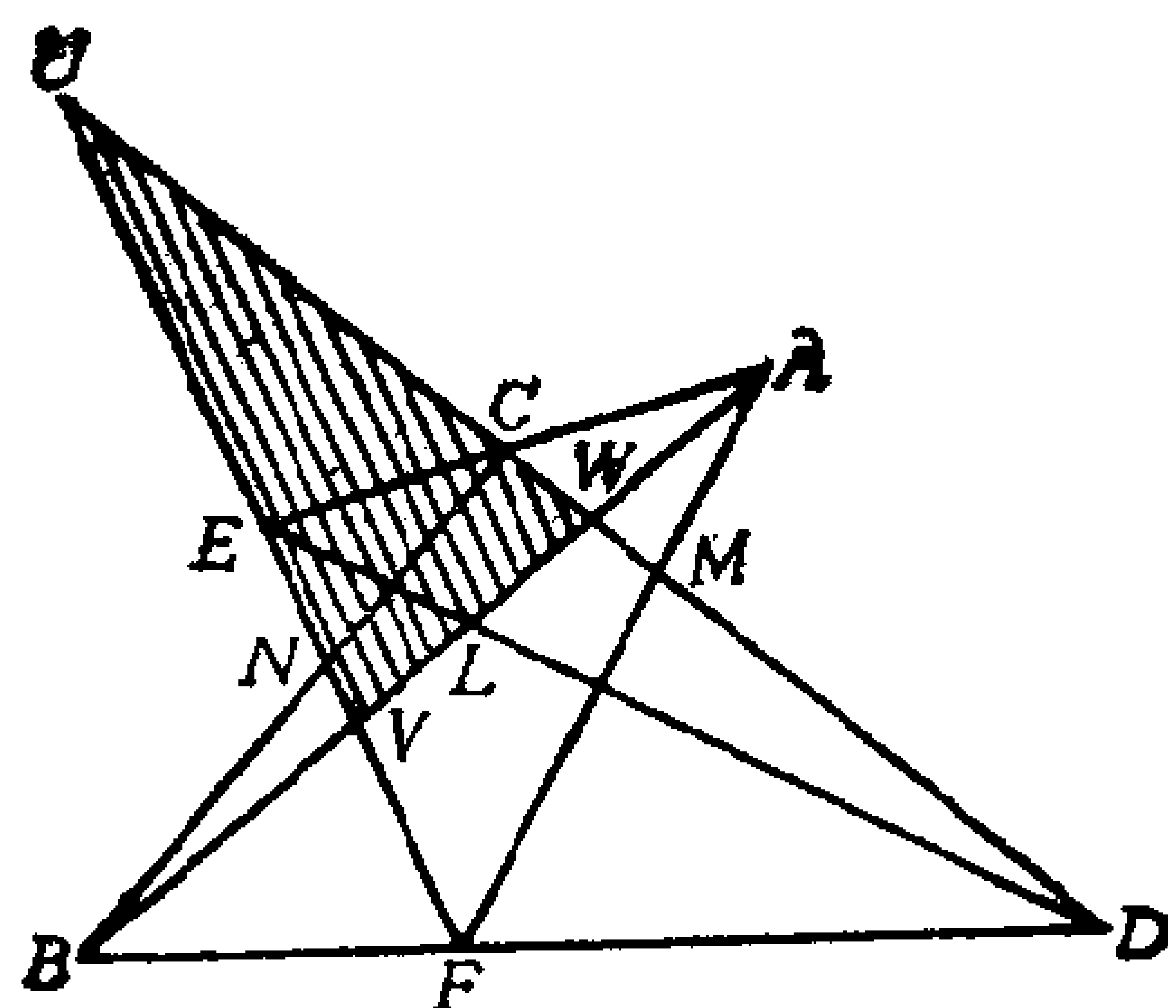


图 3.5C

习　题

1．若 A,C,E 是直线上的三个点，B,D,F 是另一条直线上的三个点，如果直线 AB 和 CD 分别平行于 DE 和 FA，

则 EF 平行于 BC。

2. 若A,B,D,E,M,N 六点使直线AE,DM,NB 共点，并且使直线AM,DB,NE 共点，则关于 AB,DE,NM 有什么结论？

3. 设C和F分别是在平行四边形 $AEBD$ 的两边 AE和BD 上的点。M,N 分别表示 CD 和 FA 的交点 及 EF 和 BC 的交点。设直线 MN 与DA 交于P 点，MN 与 EB 交于Q点，则 $AP=QB$。

4. 在图3.5A (或图3.5B)中，已命名的点和直线各有多少？经过每一点各有多少条直线？落在每一条直线上各有多少点？

§3.6 透视三角形.迪萨格定理

透视的几何理论是建筑师布鲁纳勒希(F. Brunelleschi, 1377—1446)开创的，他设计了佛罗伦萨大教堂的八角穹顶，还设计了比特宫。这种理论由另一位建筑师迪萨格(G. Desargues, 1591—1661)作了进一步的研究。他的"两个三角形"的定理后来被发现与帕普斯定理是同等重要的。这个定理实际上可以从帕普斯定理导出，但是具体的推导过程是很复杂的；而从梅内劳斯定理出发可以容易得多地得到这个定理。

如果由点和直线构成的两个图形之间能建立对应关系，使得各对对应点的连线经过同一个点，则称这两个图形关于一点是透视的。如果对应关系使各对对应直线的交点在一条直线上，则称这两个图形关于一条直线是透视的。采用射影几何的说法，迪萨格的两个三角形的定理可以叙述成：若两个三角形关于一点是透视的，则它们也关于一条直线是透视

的。为了避免由于出现平行直线而产生的复杂性，我们限于如下所叙述的

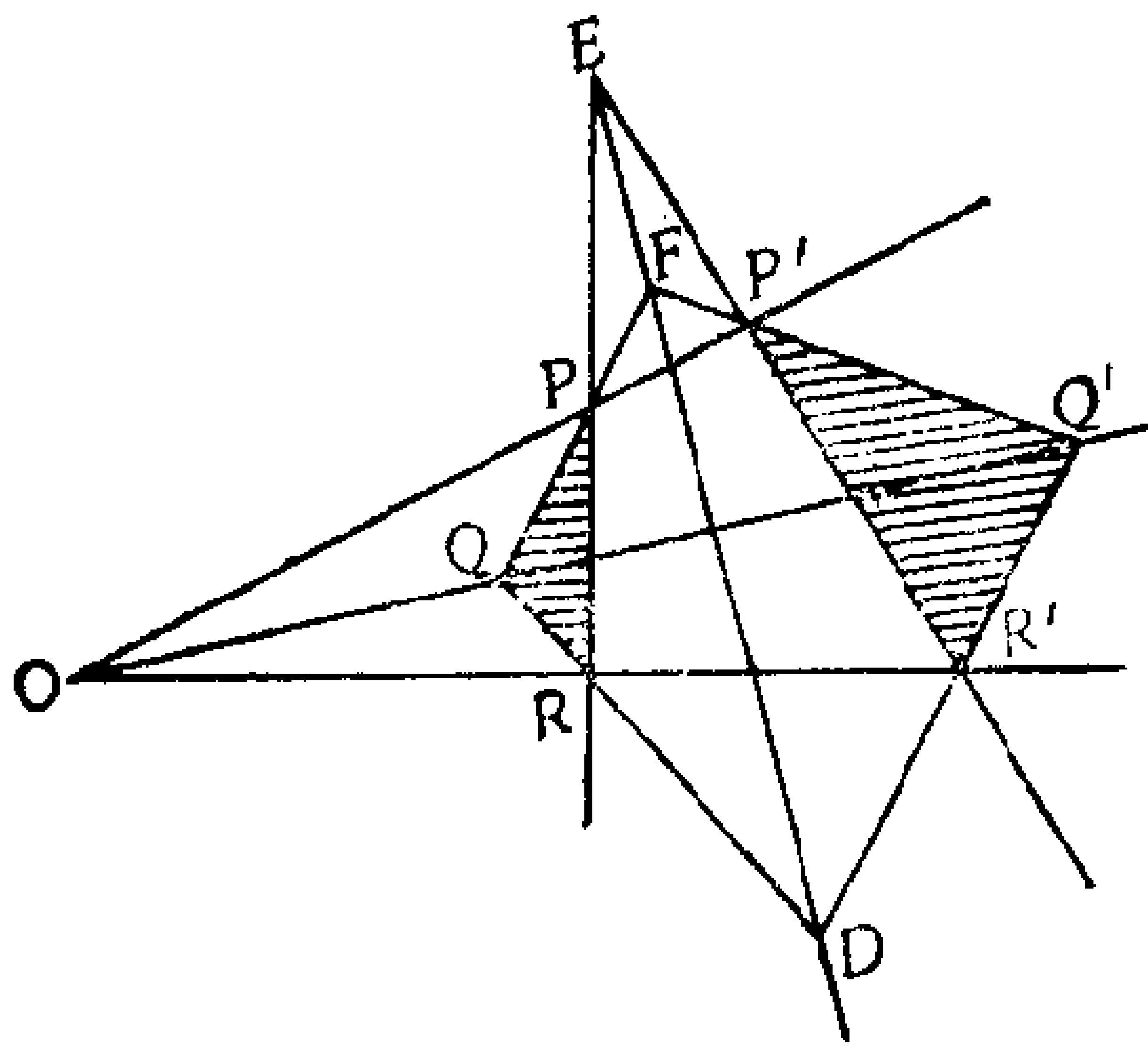


图 3.6A

定理3.6.1 若两个三角形关于一点是透视的，并且它们的对应边相交，则这三个交点共线。

这又是一个纯粹关联性的定理。图 3.6A 和 B画出了该图形的两种情形。其中$\triangle PQR$和$\triangle P'Q'R'$关于点 O 是透视的，它们的各对

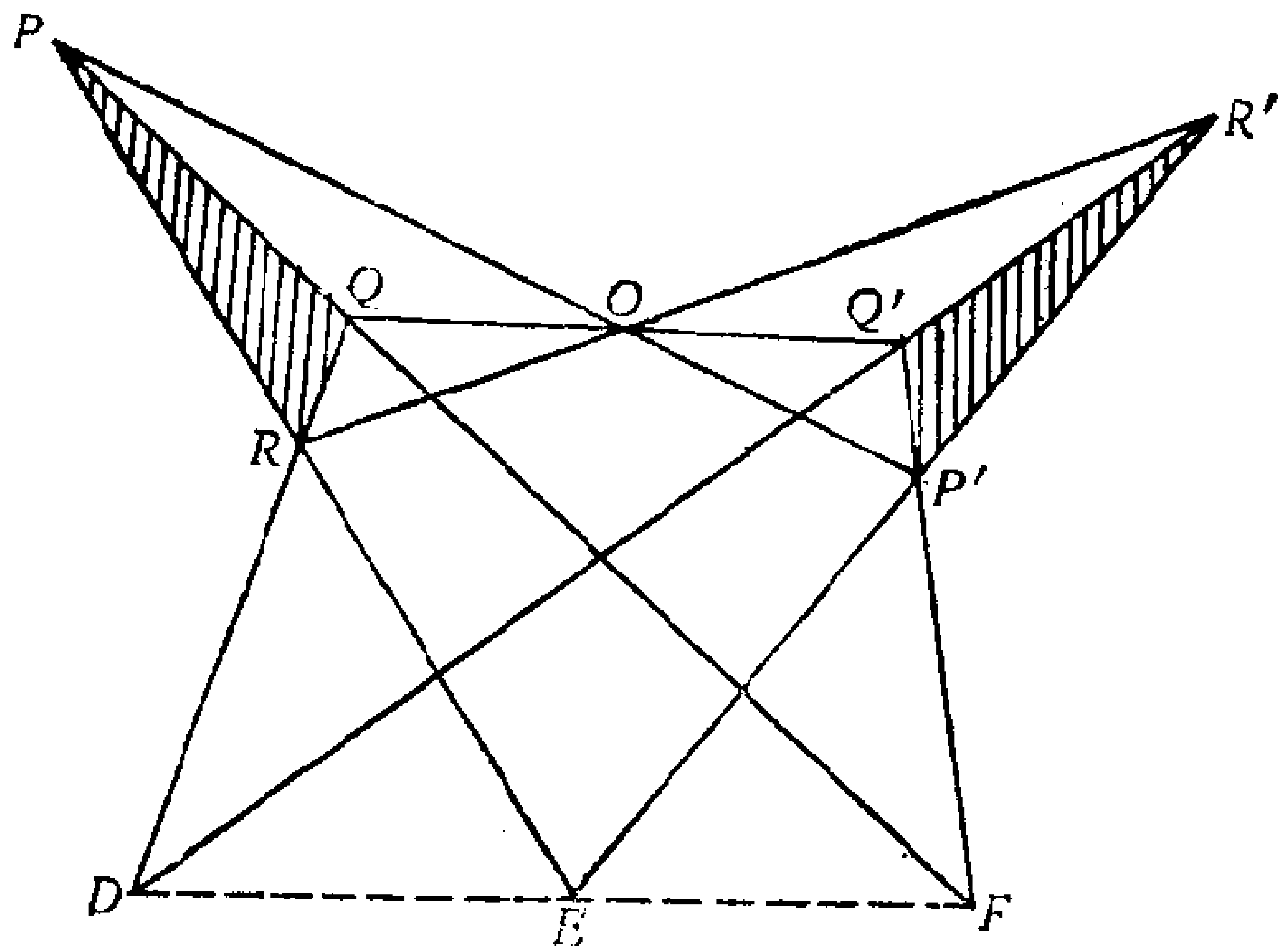


图 3.6B

对应边相交于 D,E,F。(在§3.3的习题 2 中已考察过透视三角形的一些例子，如三角形 ABC，PQR，$O_1O_2O_3$ 中每两个

都是关于一点透视的。）

为证明这个定理，我们把定理3.4.1分别用于在三个三角形 OQR, ORP, OPQ 的各边上的幷三点组

$$DR'Q',\quad EP'R',\quad EQ'P',$$

得到

$$\frac{QD}{RD}\cdot\frac{RR'}{OR'}\cdot\frac{OQ'}{QQ'}=1,$$

$$\frac{RE}{PE}\cdot\frac{PP'}{OP'}\cdot\frac{OP'}{RR'}=1,$$

$$\frac{PF}{QF}\cdot\frac{QQ'}{OQ'}\cdot\frac{OP'}{PP'}=1.$$

将三式相乘得到

$$\frac{QD}{RD}\cdot\frac{RE}{PE}\cdot\frac{PF}{QF}=1.$$

因此 D, E, F 是共线的，此即所要证明的结论[17,P.231]。

迪萨格定理显然蘊含着它的逆定理：若两个三角形关于一条直线是透视的，则它们也关于一点是透视的。我们限于把它叙述成：

定理3.6.2 若两个三角形关于一条直线是透视的，幷且有两对对应点的连线相交，则这两个三角形关于该交点是透视的。

所谓 $\triangle PQR$ 和 $\triangle P'Q'R'$ 关于一条直线是透视的，是指三点①

$$D=QR\cdot Q'R',\qquad E=RP\cdot R'P',\quad F=PQ\cdot P'Q'$$

是共线的，如图3.6A。若命 $O=PP'\cdot RR'$，要证的就是 O

① 从上下文可知，记号 AB 表示经过点 A, B 的直线，而不只是以 A, B 为端点的线段。用 $AB\cdot DE$ 表示两条非平行直线 AB 和 DE 的公共点是方便的，这比某些作者用的记号 $(A\oplus B\cap(C\oplus D)$ 来得简明。

与 Q，Q' 是共线的。因为 $\triangle FPP'$ 和 $\triangle DRR'$ 关于点 E 是透视的，于是从定理 3.6.1 得到，这两个三角形的各对对应边的交点，即

$$O = PP' \cdot RR', \quad Q' = P'F \cdot R'D, \quad Q = FP \cdot DR$$

是共线的，证毕。

这是纯粹的"射影几何"证明的一个例子。

习　题

1. 若两个三角形关于一点是透视的，且两对对应边互相平行，则另一对对应边也互相平行。（根据§1.2习题3，这两个三角形称做是位似的。）

2. 在图3.6A(或 B)中命名了多少个点和多少条直线？经过每一点有多少条直线？落在每一条直线上有多少个点？

3. 指出图中关于(i) 点 P；(ii) 点 P'；(iii) 点 D 是透视的两个三角形。

4. 关于五角形 $DFP'OR$ 和 $EPQQ'R'$ 的顶点和边能说些什么？图形中是否还包含其它类似的五角形？

5. 在一张纸上画两条不平行的直线，使它们的交点落在纸外。在纸上两条直线所夹的部分内任取一点 P，试作一条直线经过 P 点，并且它的延长线会经过已知直线的交点。若把上面的作图法用于两条平行直线，则得什么样的图形？

§3.7　六角形

六角形的两个顶点依照它们是用一条边、两条边还是三条边隔开的三种不同的情形分别叫做相邻的、相间的或相对的。这样，在六角形 $ABCDEF$ 中，F 和 B 是 A 的相邻的顶点，E 和 C 是 A 的相间的顶点，D 是 A 的相对的顶点。两个

相对顶点的连线称为对角线，于是$ABCDEF$有三条对角线：AD,BE,CF。同样，六角形$ABCDEF$有三对对边：AB和DE，BC和EF，CD和FA。

一个已知六角形可用12种方式命名为$ABCDEF$：在它的六个顶点中，任意一个都可指定为A，它的两个相邻顶点都可叫做B，而其余的顶点则按字母次序排定。

若在六个已知点中，每三个都不共线，则它们能用$6!=720$种方式命名为A,B,C,D,E,F。每一种命名的方式都确定了一个以这六个已知点为顶点的六角形$ABCDEF$。因此，由这六个点决定的不同的六角形个数是

$$\frac{720}{12}=60.$$

图3.7A画出了圆上六个点确定的60个六角形中的三个。尽管我们习惯于画成第一种图形（“凸”六角形），但是我们不能忘记或忽略从这六个点得到的另外59个可能的六角形。

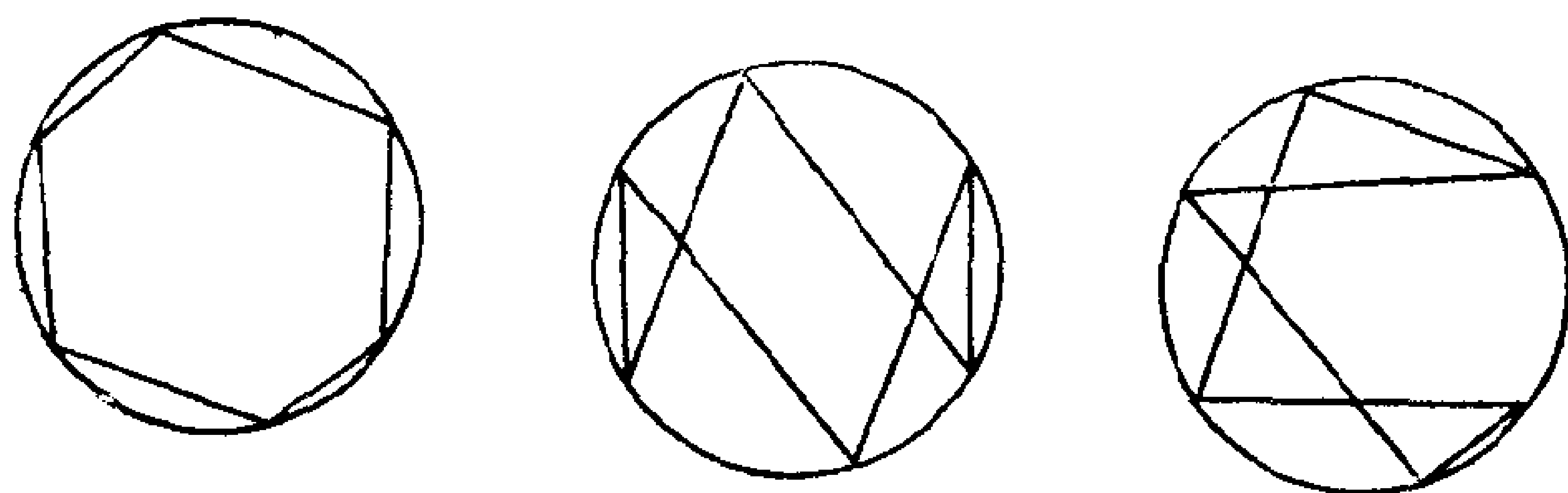


图 3.7A

在§3.1中，我们主张多角形不应该有接连的三点是共线的，但是另外情形的共线性却是容许的。特别是，定理3.5.1（帕普斯定理）可以重述为：

如果六角形的各组相间的顶点是共线的，且它的三对对边分别相交，则这三个交点共线。

习　　题

1. 若六角形$ABCDEF$有两条对边BC和EF平行于对角线AD，两条对边CD和FA平行于对角线BE，并且其余两条对边DE和AB也彼此平行，则第三条对角线平行于AB，并且$\triangle ACE$和$\triangle BDF$的重心是重合的。

2. 两个并三共线点组可以按多少种方式看作一个六角形的相间顶点的并三组？

§3.8 帕斯卡定理

现在我们要讲到哲学家、数学家帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662)在他16岁时发现的一个惊人的定理：

定理3.8.1 若六角形的六个顶点落在一个圆上，且它的三对对边分别相交，则这三个交点共线。

没有人知道帕斯卡本人是怎样证明这个定理的，他原来的证明早已丢失。但在丢失之前莱布尼兹(G. W. Leibniz, 他和牛顿共同发明了微积分学)看到过，并称赞过他的证明。这个史实便要求我们能够重现已失传的证明，即要求所给出的证明只能采用帕斯卡的时代所能用的结果和方法。弗德给出过一个证明只涉及欧几里得原本的前三卷[14, p. 13]。但是这个证明用了经过精心设计的技巧，而帕斯卡则更喜欢运用梅内劳斯定理。我们把用到梅内劳斯定理的一个证法叙述如下。

图3.8A画出了圆内接六角形$ABCDEF$。(如果同样的六个顶点用另外59种方式联结成六角形时，那末读者能够容易地看出在论证中的哪些地方需要作适当的修改。)我们希望证明三个交点

$$L=AB\cdot DE, \quad M=CD\cdot FA, \quad N=BC\cdot EF$$

是共线的。

假定三条直线AB,CD,EF构成三角形UVW，如图3.8A。把定理3.4.1用于三角形UVW的各边上的三点组LDE，AMF，BCN，我们得到

$$\frac{VL}{WL}\cdot\frac{WD}{UD}\cdot\frac{UE}{VE}=1,$$

$$\frac{VA}{WA}\cdot\frac{WM}{UM}\cdot\frac{UF}{VF}=1.$$

$$\frac{VB}{WB}\cdot\frac{WC}{UC}\cdot\frac{UN}{VN}=1.$$

将以上三式相乘，再用定理2.1.1得到

$$\frac{WD}{UD}\cdot\frac{UE}{VE}\cdot\frac{VA}{WA}\cdot\frac{UF}{VF}\cdot\frac{VB}{WB}\cdot\frac{WC}{UC}$$

$$=\frac{UE\times UF}{UC\times UD}\cdot\frac{VA\times VB}{VE\times VF}\cdot\frac{WC\times WD}{WA\times WB}=1,$$

所以

$$\frac{VL}{WL}\cdot\frac{WM}{UM}\cdot\frac{UN}{VN}=1,$$

因此L,M,N三点共线①。

包含三点L,M,N的直线称为六角形的帕斯卡线。如§3.7所述，同样的六个点一共决定了60个六角形；因此，一般说来，六个点决定了60条帕斯卡线。这60条线形成一个十分有趣的

---

① 重现帕斯卡的证明的上述尝试出现在斯皮克(T. Spieker)的《平面几何教程》(Lehrbuch der ebenen Geometrie)第18版(Potsdam，1888年)。也可查看[17,p.235]或[24,p.26]。另一个尝试可看考克瑟特和格雷策的论文《帕斯卡的六角形：重现他的发现的一个尝试》(L'hexagramme de Pascal.Un essai pour reconstituer cette découverte)，刊载在*Le Jeune Scientifique*(Joliette, Quebec)2(1963)，pp. 70—72.

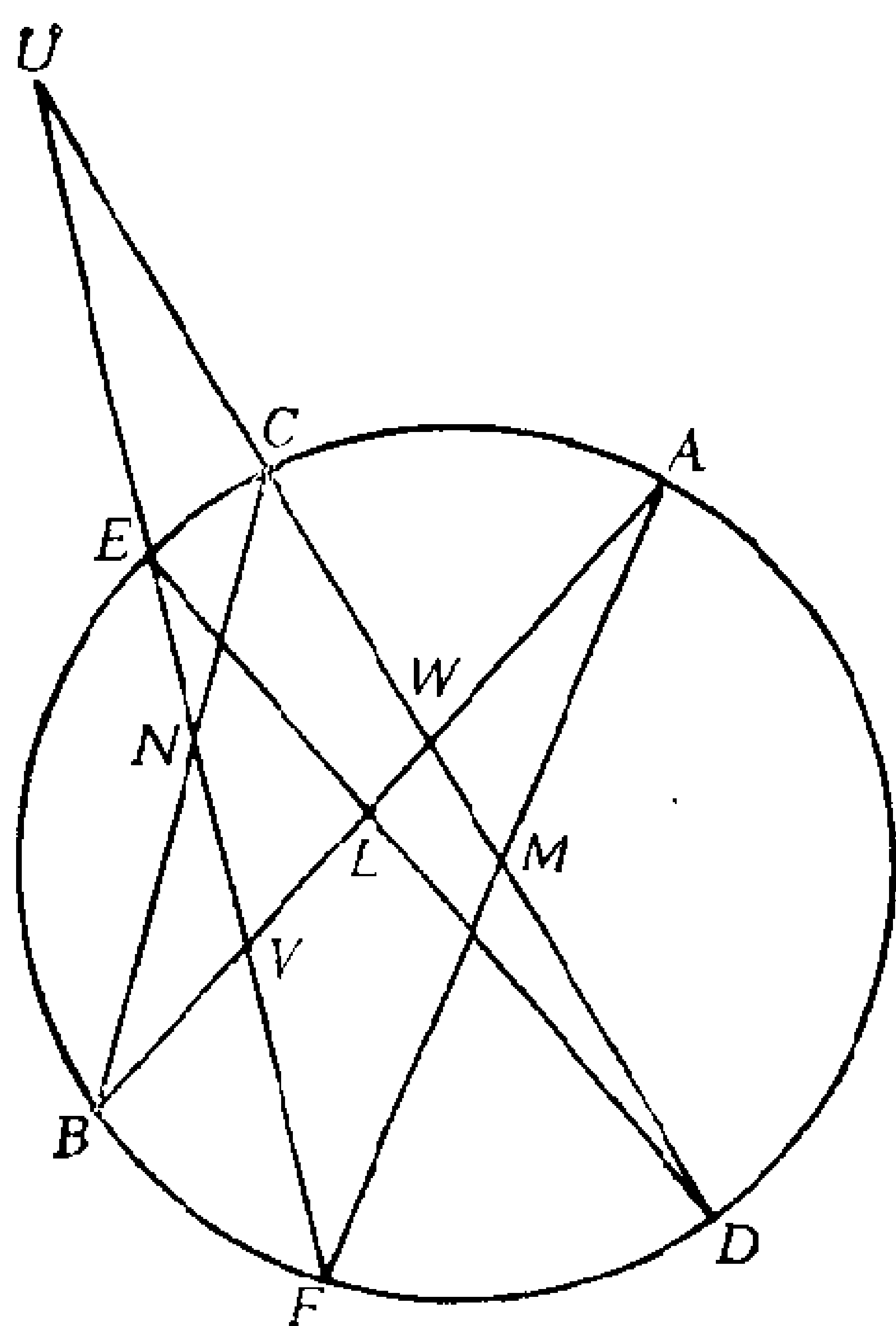


图 3.8A

构图，其中某些直线是共点的，而某些公共点是共线的。

根据留传下来的帕斯卡的著作《圆锥曲线试论》(Essay pour les coniques)，他已知道他的定理不仅对于圆内接六角形是成立的，而且对内接于圆锥曲线的六角形也成立。布赖肯里奇(W Braikenridge)和马克劳林(C.MacLaurin)各自独立地证明了帕斯卡定理的逆定理，这在射影几何学的教科书中可以找到，如[7,p.85]：

若六角形的三对对边交成三个共线的点，则它的六个顶点落在一条圆锥曲线上(包括退化成一对直线的情形，如定理3.5.1)。

若允许内接六角形的顶点重合，而且仔细地标记这些顶点，则我们能得到一些关于内接五角形和内接四角形的有趣的定理。这时，端点重合的边成为一个点，而包含该边的直线成为圆(或圆锥曲线)在该点的切线。例如，考虑图3.8B所示的内接四角形$ADBE$。把交叉四角形$ABDE$看作退化的六角形，其中假定$B=C$，

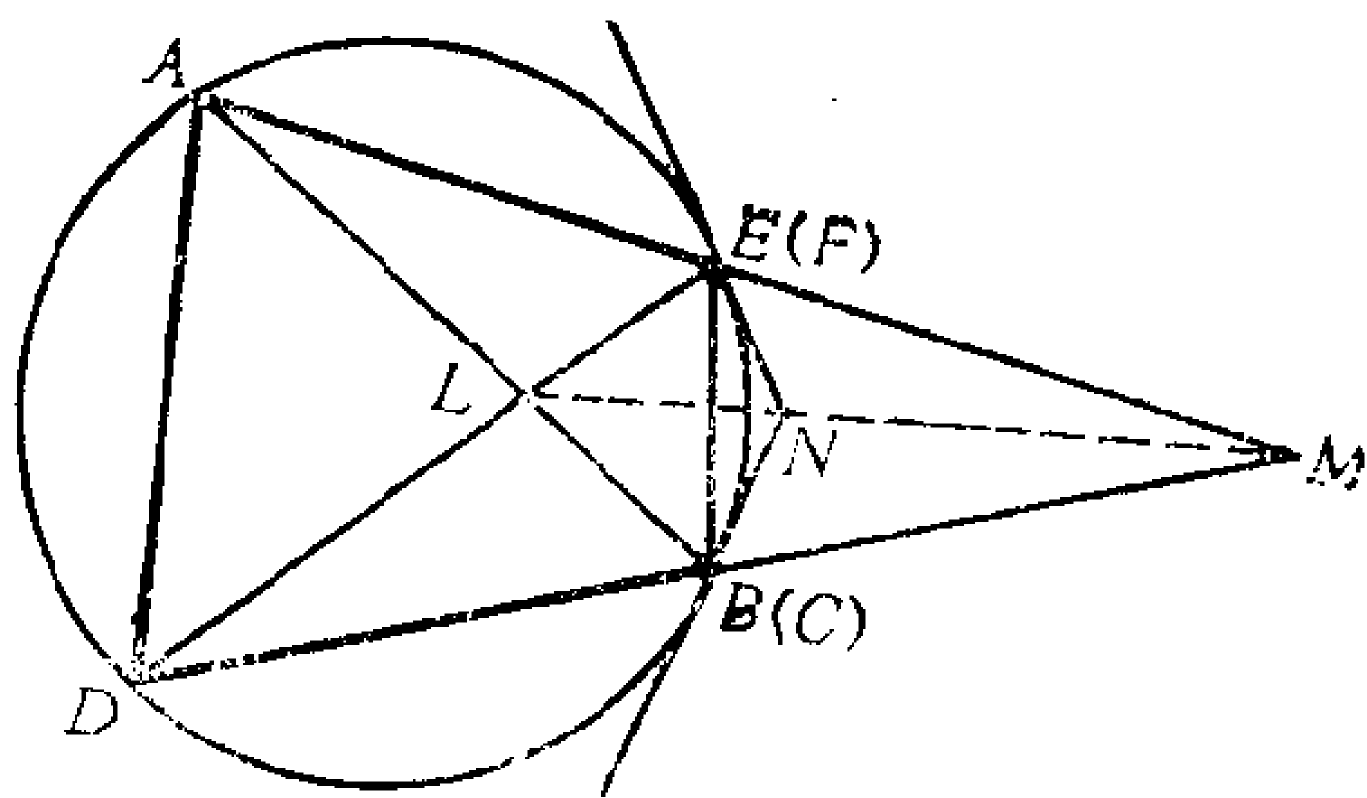


图 3.8B

$E=F$,则用帕斯卡定理得到：图在B,E两点的切线的交点N落在经过

$$L=AB\cdot DE \quad 和 \quad M=BD\cdot EA$$

的直线上。

习　　题

1．若六角形的六个顶点中有五个落在一个圆上，而三对对边的交点共线，则它的第六个顶点也在这个圆上。

2．若圆内接四角形$ABCE$的对边都不平行，则在A,C两点的切线的交点落在$AB\cdot CE$和$BC\cdot EA$的连线上。

§3.9　卜立安香定理

卜立安香(C. J. Brianchon,1760—1854)发现了一个关于圆锥曲线的外切六角形的有趣的定理(它与帕斯卡定理有巧妙的联系)。卜立安香的证明用到了点和直线的“对偶性”，这是属于射影几何学的概念。当圆锥曲线本身是一个圆时，寻求欧几里得几何式的证明是一个吸引人的难题。斯莫格茨夫斯基(A. S. Smogorzhevskii)成功地解决了这个问题[27, pp. 33-34]。在叙述详细证明之前，我们先证下面的引理：

设P'和Q'分别是圆周在P,Q的切线上的两个点(假定它们在直线PQ的同一侧)，使得$PP'=QQ'$，则存在一个圆分别与直线PP'和QQ'在P'和Q'处相切。

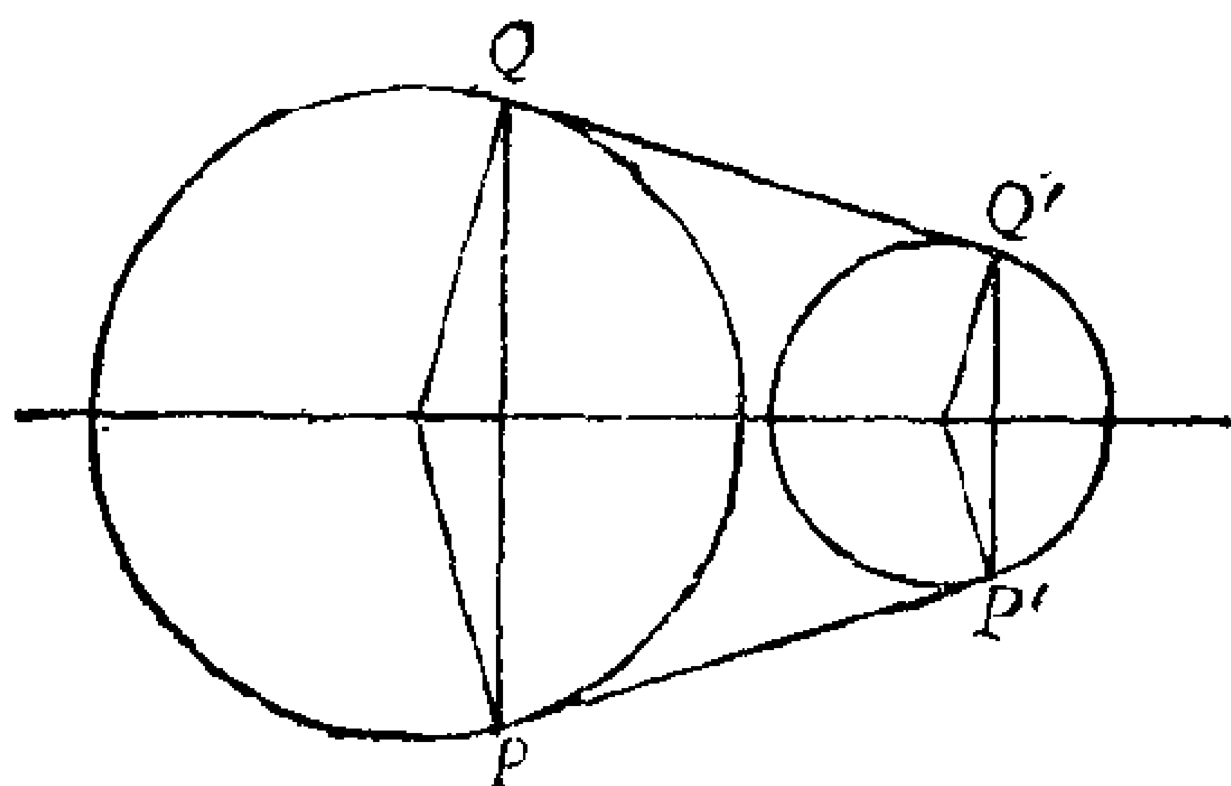


图　3.9A

事实上，整个图形(图3.9A)关于 PQ 的垂直平分线是对称的，这条垂直平分线也是 $P'Q'$ 及已知圆的一条直径的垂直平分线，PP' 和 QQ' 在 P' 和 Q' 处的垂线都与这条"中间线"或("镜子")交于同一个点，此即所求圆的圆心。

现在我们已为叙述斯莫格荧夫斯基的证明做好了准备。

定理3.9.1 若一个六角形的六条边与一个圆相切，则它的三条对角线共点(或彼此平行)。

如图3.9B，设 R,Q,T,S,P,U 是六条切线 AB,BC,CD DE,EF,FA 的切点。为叙述简单起见，假定六角形 $ABCDEF$ 是"凸"的，所以三条对角线 AD,BE,CF 都是内切圆的割线(因此不可能彼此平行)。在线段 EF,CB,AB,ED,CD,AF 的延长线上取点 P',Q',R',S',T',U' 使得

$$PP'=QQ'=RR'=SS'=TT'=UU'$$

(等于适当的长度)。根据引理，可作圆Ⅰ(与 PP' 和 QQ' 在 P' 和 Q' 相切)，圆Ⅱ(与 RR' 和 SS' 在 R' 和 S' 相切)和圆Ⅲ(与 TT' 和 UU' 在 T' 和 U' 相切)。

我们知道，从一点向同一个圆引的两条切线是等长的。因为 $AR=AU$，$RR'=UU'$，相加后得到 $AR'=AU'$。又因为 $DS=DT$，$SS'=TT'$，相减后得到 $DS'=DT'$。这样，A 和 D 关于圆Ⅱ和圆Ⅲ是等幂的(§2.2)；于是，连线 AD 是这两个圆的根轴。同理，BE 是圆Ⅰ和圆Ⅱ的根轴，CF 是圆Ⅲ和圆Ⅰ的根轴。由§2.3可知，对于三个不共轴的圆，两两配对所取的根轴必定是共点的(或平行)。在前面我们已把六角形的对角线看成三个圆的根轴。显然这三条对角线是不重合的，因此这三个圆不会是共轴的，这就完成了所要的证明。

逆定理是属于射影几何学的，它可叙述如下[7, p. 23]：

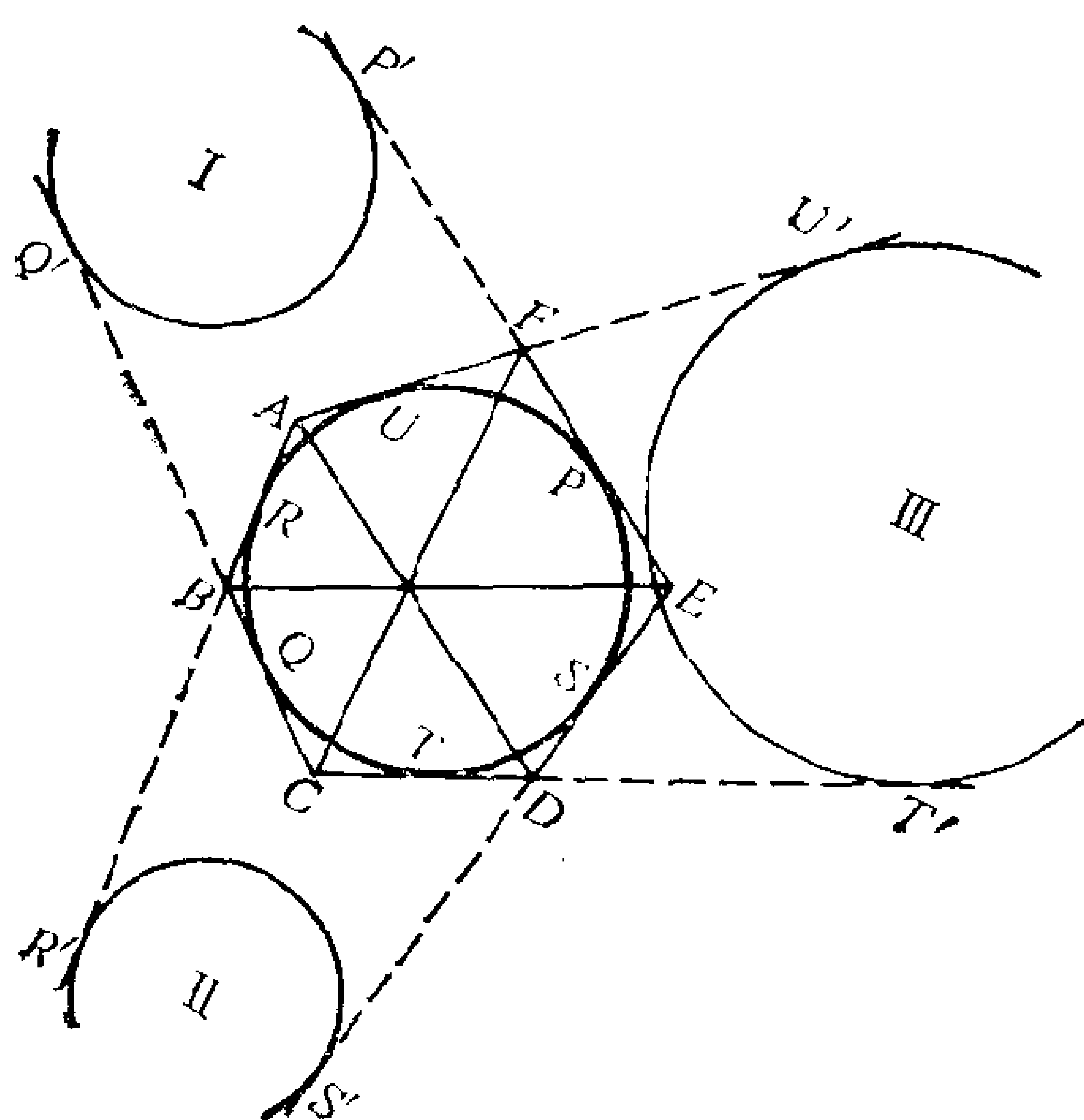


图　3.9B

若一个六角形的三条对角线共点，则它的六条边与一条圆锥曲线相切(包括该曲线退化成一对点的情形在内，如§3.5习题2中关于六角形$ABDEMN$的点偶FL)。

若容许外切六角形的边接合成一条线段，并且小心地标记这些边，则能得到若干关于外切五角形，外切四角形的有趣的定理. 这时，成一直线的两条边的公共顶点是它们与圆

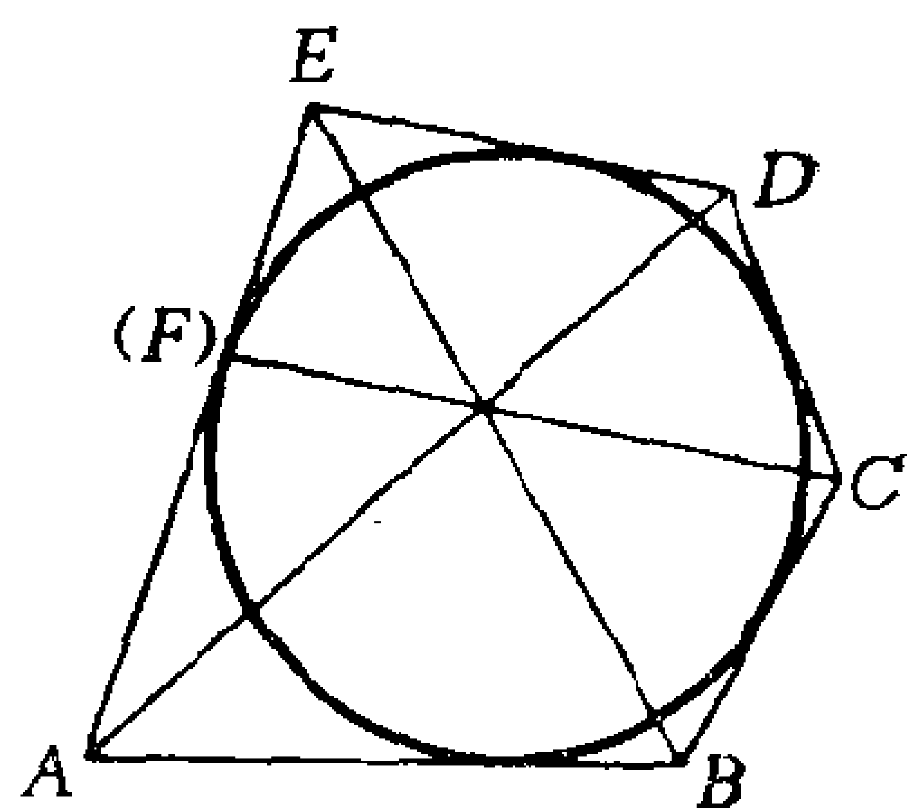


图　3.9C

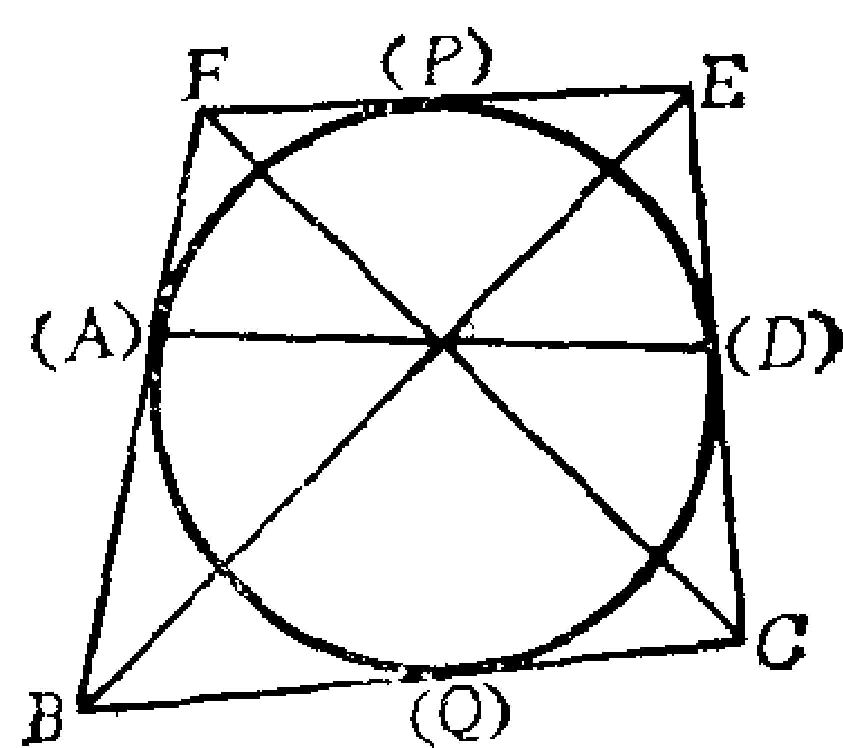


图　3.9D

(或圆锥曲线)的切点。

例如，考虑图3.9C所画的外切五角形$ABCDEF$。把它看成在点F是平角的退化六角形$ABCDEF$，用卜立安香定理可得：外切五角形的EA边的切点F落在顶点C与交点$AD\cdot BE$的连线上。

同理，若外切四角形$BCEF$的边FB和CE与圆相切于点A和D，则可把它看作退化的六角形，从而得知：四角形的对角线BE和CF相交在FB和CE与圆的切点的连线上。

习　题

1．在图3.9D中，联结另外两个切点的直线PQ也经过对角线的交点。

2．在图3.9D中，考虑六角形$ABQCEF$，则哪几条线共点？

3．卜立安香定理是否蕴含着§1.4习题3的新解法？

第四章 变　换

以诺奇因着信仰被接去①，他不会见到死；人也找不着他，因为上帝已经把他接去了：只是在他被接去之前，已经得到上帝喜悦他的明证。

新约·希伯来书，第十一章

在§1.6的最后一段，我们借助于互相垂直的直线HD和CB分别绕D和B转过同一个角度α，得知FD和OB之间也构成直角(图1.6A)。在定理1.7.1前面的那段叙述中，我们看到相似三角形ABC和$A'B'C'$有相同的重心，而它们的垂心是H和O，故$AH=2OA'$。还有，在定理1.8.1后面的说明中，我们利用中心对称，把两个全等三角形$A'B'C'$和KLM的垂心互换了。旋转、位似和中心对称是变换的三个例子。在此，变换是指整个平面到它自身的一个映射，使得每一点P都有唯一的一个像点P'，而且每一点Q'都有它的唯一的原像点Q。"映射"的概念在数学的许多分支中都占有突出的地位；例如，当我们记$y=f(x)$时，我们就把x的值的集合映到了y的对应值的集合。

欧几里得几何学只是名目繁多的几何学中的一种，每一种几何学都有它自己的基本概念、公理和定理。克莱茵(F. Klein)于1872年在爱尔兰根发表了他的就职演说，他建议几何学应按变换群分类，在某个变换群的作用下，相应几何学的概念、公理和定理是保持不变的。特别是，欧几里得几何学是以相似变换群为特征的；相似变换群是由保角变换组

① 这里的"接去"的原文是"was translated"，后者在数学中的意义是"被平行移动。"——译者

成的。等距变换是相似变换的重要特例，它是保持长度不变的变换，如旋转、中心对称都是等距变换，等距变换是“全等”这一概念的基础：两个图形是全等的，当且仅当存在一个等距变换把其中一个图形变到另一个图形。

§4.1 平行移动

除恒同变换[①]外，最熟悉的变换是平行移动，它保持任意两点之间的距离以及过这两点的直线方向不变。

若线段$A'B'$是线段AB在平行移动下的像，则或者这四

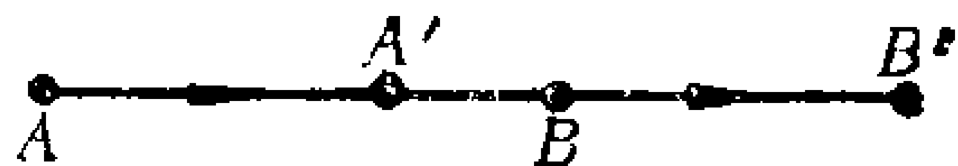


图 4.1A

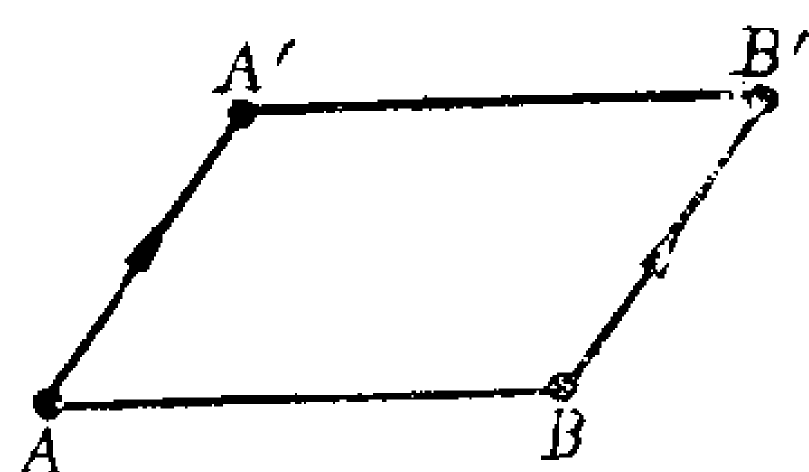


图 4.1B

点A,B,A',B'在一条直线上，如图4.1A；或者$AA'B'B$成平行四边形，如图4.1B.（自然，前者可以看作是退化的平行四边形$AA'B'B$.）这样，平行移动是由有向线段AA'决定的，或者说是由其它无限多条有相同长度和方向的有向线段(如BB')决定的. 平行移动的另一个同义词是向量，我们记成$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$. 特别是，恒同变换可以看作是移动的距离为零的平行移动，即恒同变换相当于一个零向量。

平行移动保持任何图形的形状和大小不变，这一事实被用来证明许多关于面积的定理。例如(看图4.1C)，在推导A为锐角的平行四边形$ABCD$的面积公式时，把直

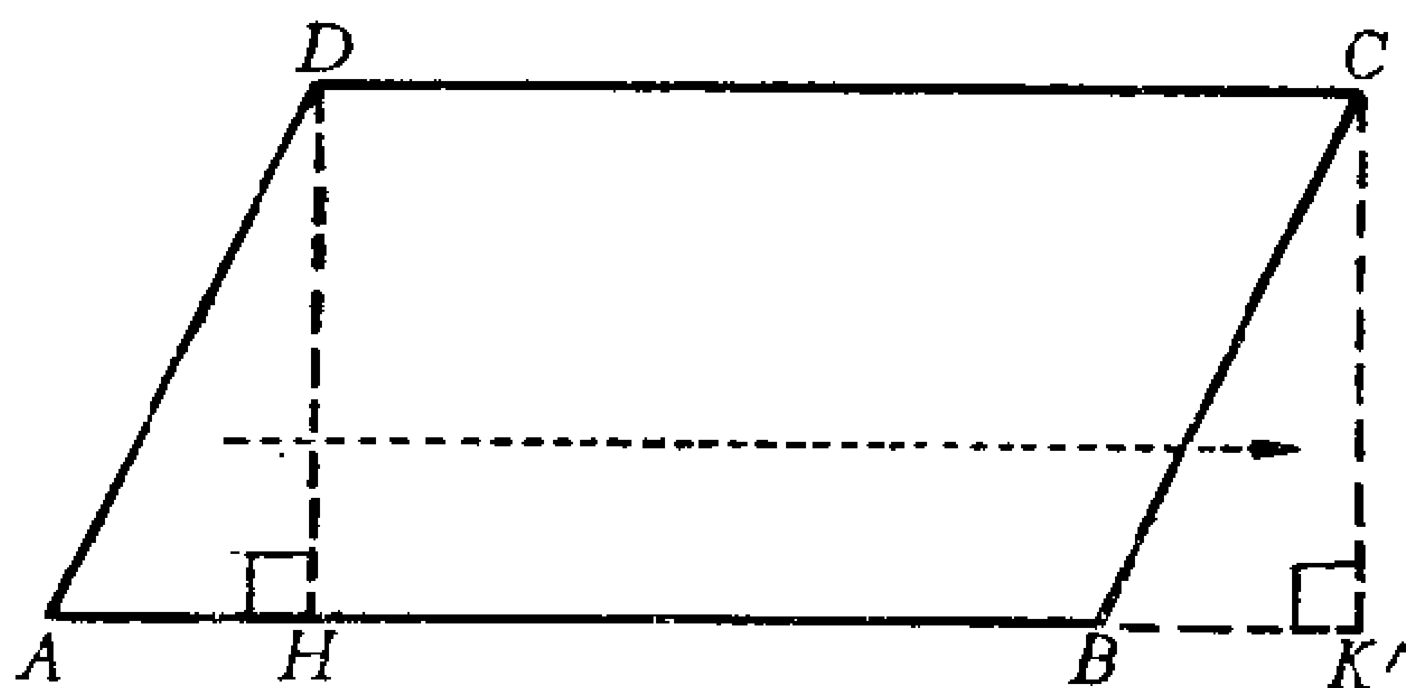


图 4.1C

① 所谓恒同变换是指把每一点留在它原来的位置上不动的变换。

角三角形 AHD 切下来，平行移动到位置 $BH'C$，然后再粘起来得到矩形$HH'CD$。

图4.1D 给出了下列作图题的图解：在已知圆中作内接矩形，使它的一组对边平行且等于一条已知线段 a。线段 a 可以代表长度相等而方向相反的两个向量。我们把已知圆沿着 a 所代表的其中一个向量作平行移动，设新的圆和原来的圆有两个交点 B 和 C，则它们恰是所求矩形 $ABCD$ 的两个顶点。这时，矩形的两边AB和 DC必定平行于 a，且与 a 相等。

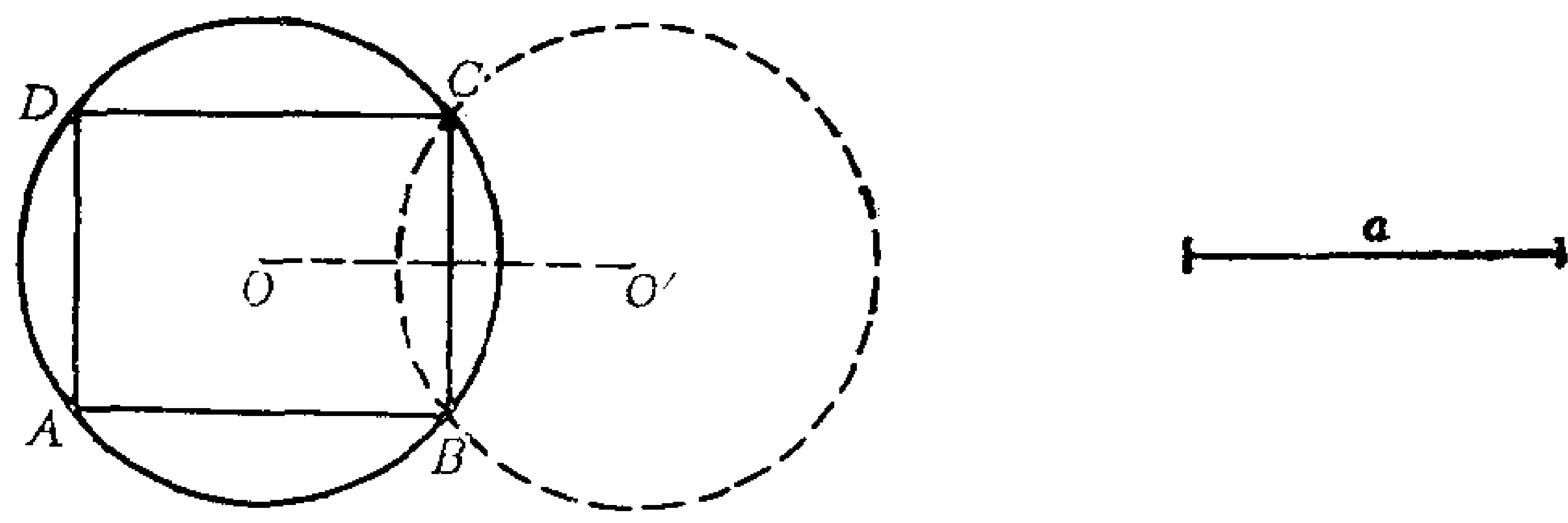


图 4.1D

习　题

1. 在$\triangle ABC$(图4.1E)中内接一条线段，使它平行且等于已知线段 a。

2. 让已知等边三角形 ABC 作平行移动，使得平移向量是$\overrightarrow{AB}$的整数倍加上$\overrightarrow{AC}$的整数倍。画图表示$\triangle ABC$经过以上所有可能的平行移动所构成的图形。

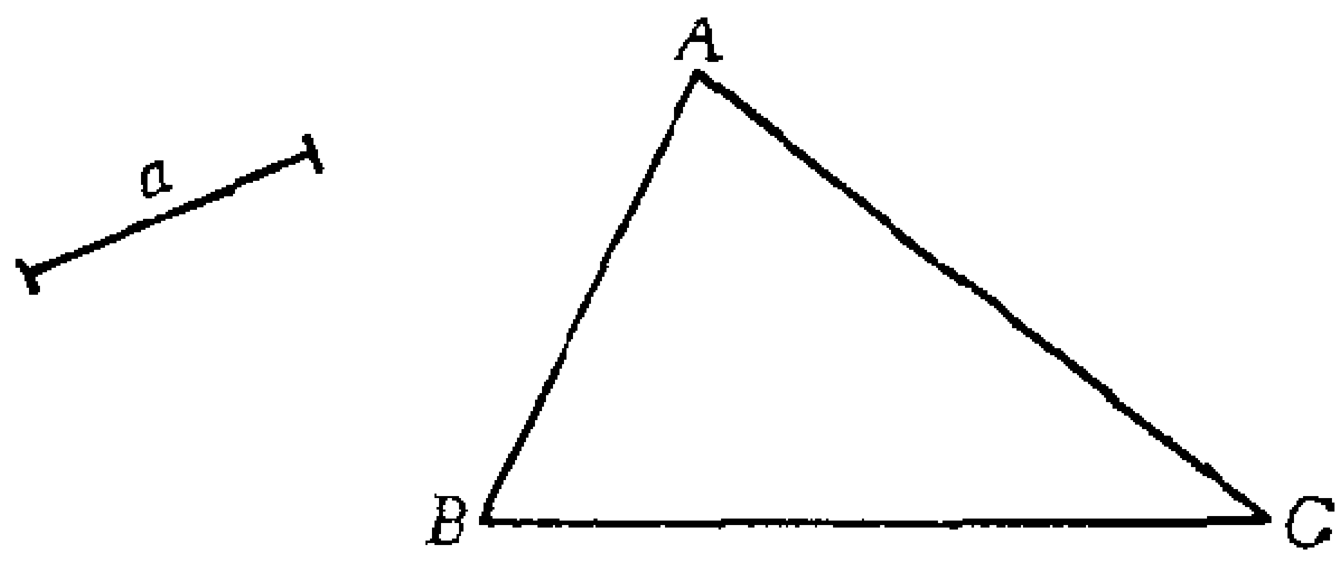


图 4.1E

§4.2 旋转

旋转是又一种保持距离不变的变换，它把整个平面围绕某个点转过一个已知角。这时，任何一个图形的形状和大小都保持不变，而且图形的每一点都沿着同心圆弧运动；中心是仅有的保持不动的点（它可以属于、也可以不属于作旋转的图形）。

作为旋转的例子，我们考虑 $\triangle ABC$(图4.2A)，以及在外侧立在它的三边上的等边三角形 BPC, CQA, ARB。引直线 BQ 和 CR，它们的交点是 F。我们看到，如果绕 A 点旋转60°，则把 $\triangle ARC$ 变成 $\triangle ABQ$。因此 $\angle RFB=60°$，$RC=BQ$。同理，$PA=CR$。于是

$$AP=BQ=CR.$$

此外，由于

$$\angle RFB=60°=\angle RAB, \quad \angle CFQ=60°=\angle CAQ.$$

四角形 $ARBF$ 和 $CQAF$ 都内接于圆；又因为 $\angle BFC=120°$，

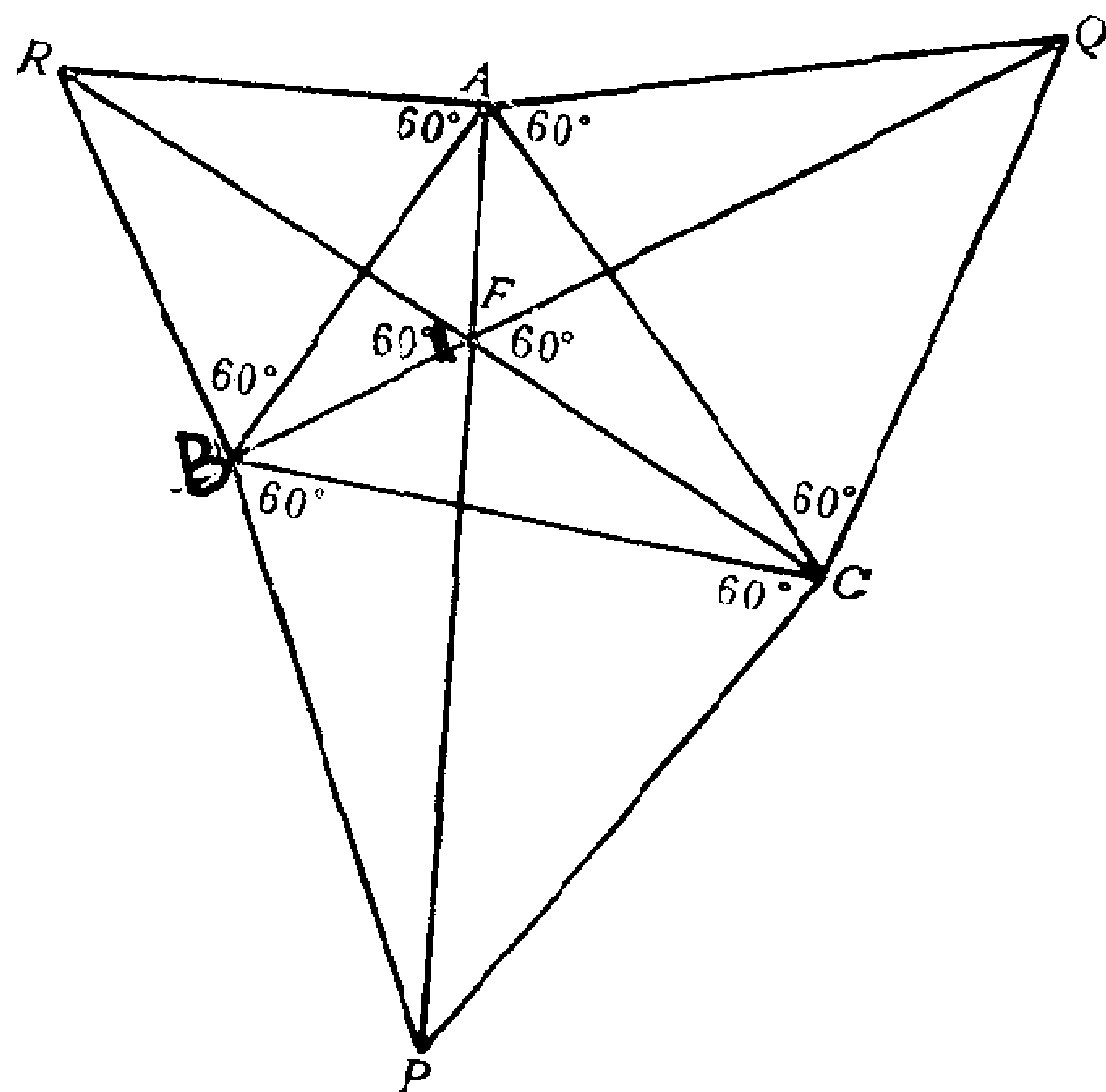


图 4.2A

且$\angle CPB=60°$，故$BPCF$是第三个圆的内接四角形。因此三角形BPC, CQA, ARB的外接圆都经过点F，它叫做$\triangle ABC$的费马点。它原来定义为BQ和CR的交点，而现在又知道它必落在AP上。

在欧几里得关于毕达哥拉斯(Pythagoras)定理[1]的证明中，在已知直角三角形ABC的各边向外侧作正方形$CBIG$, $ACKJ$, $BADE$，如图4.2B；最后一个正方形被高线CH分成

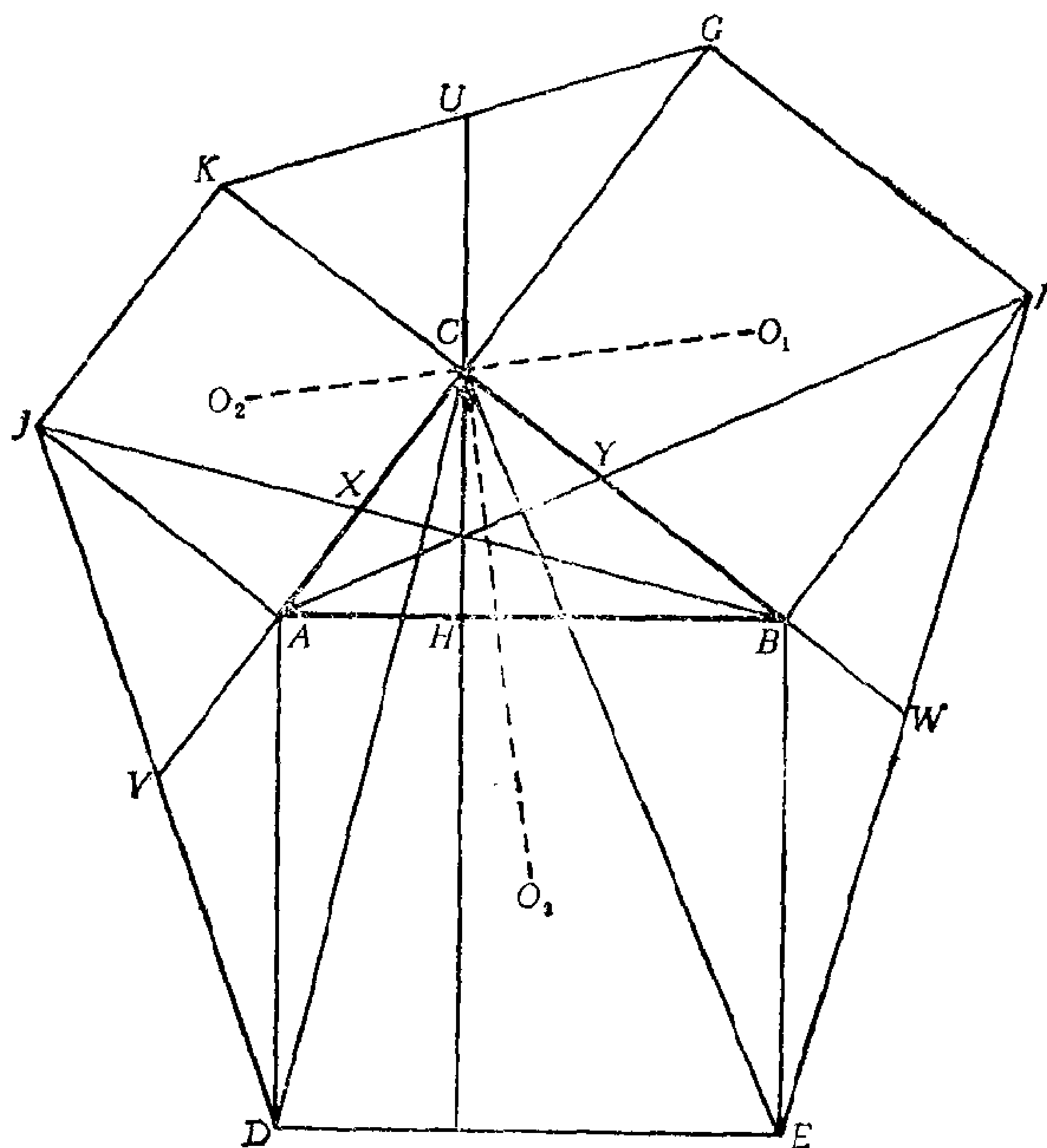


图 4.2B

① 即勾股定理或商高定理，早在我国西周时代已有"勾三股四弦五"的说法，这比欧洲要早好几百年。——译者

两部分。这里，O_1, O_2, O_3 是这三个正方形的中心，U, V, W X, Y的意义如图上所示。尽管有许多证法比欧几里得关于毕达哥拉斯定理的证明要容易，但是欧几里得的图却提供了许多未曾料到的结果。

画出线段AI, BJ, CD和CE，容易看出绕A点旋转$90°$便把$\triangle ADC$变到$\triangle ABJ$。因此$BJ=DC$，且BJ和CD互相垂直。同理，AI和CE相等且互相垂直。

由相似三角形$\triangle BCX \sim \triangle BKJ$和$\triangle CAY \sim \triangle GAI$得到

$$\frac{CX}{b}=\frac{CX}{KJ}=\frac{BC}{BK}=\frac{a}{a+b}, \qquad \frac{CY}{a}=\frac{CY}{GI}=\frac{CA}{GA}=\frac{b}{a+b},$$

因此

$$CX=\frac{ab}{a+b}=CY.$$

习　　题

1. 如果在平行四边形的各边向外侧作正方形，则这些正方形的中心是一个正方形的顶点[29, PP. 96 97]。

2. 在图4.2B中，(i) 直线AI, BJ, CH是共点的；(ii) $O_1O_2=CO_3$，且它们互相垂直；(iii) U, V, W是GK, JD, EI的中点。

3. 作一个等边三角形，把一个已知点包含在它的内部，并且使三角形的顶点到已知点的距离分别是2个单位长，3个单位长和4个单位长。

§4.3　中心对称①

有一种旋转和平行移动很相近，它把每一条直线变成与它平行的直线。这就是旋转角为$180°$的旋转，也称作中心对

① 原文标题是“半周角旋转(Half-turn)”，为了与习用的中文名称相一致，我们译作“中心对称”。——译者

称，它把每一条射线变成指向相反的射线。显然，中心对称由它的中心完全确定。因为平行移动把每一条射线变成一条平行的射线，因此，两次中心对称连续作用的结果和一次平行移动是等效的。这个事实可简述为两次中心对称的"和"是一次平行移动。(如果两次中心对称有同一个中心，则它们的和是恒同变换。)确切地说，如果 A, B, C 在一条直线上，并且 B 是 AC 的中点，则以 A 为中心的对称保持 A 不动，而以 B 为中心的对称把 A 变成 C；于是这两个中心对称的和就是平行移动 $\overrightarrow{AC}$。同样，它也可看作中心分别在 B 和 C 的中心对称之和。

图4.3A 解释了分别以 O_1 和 O_2 为中心的对称之和。线段 AB 先变成线 $A'B'$(指向翻转)，再变成 $A''B''$；因此它们的和是平行移动 $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$。

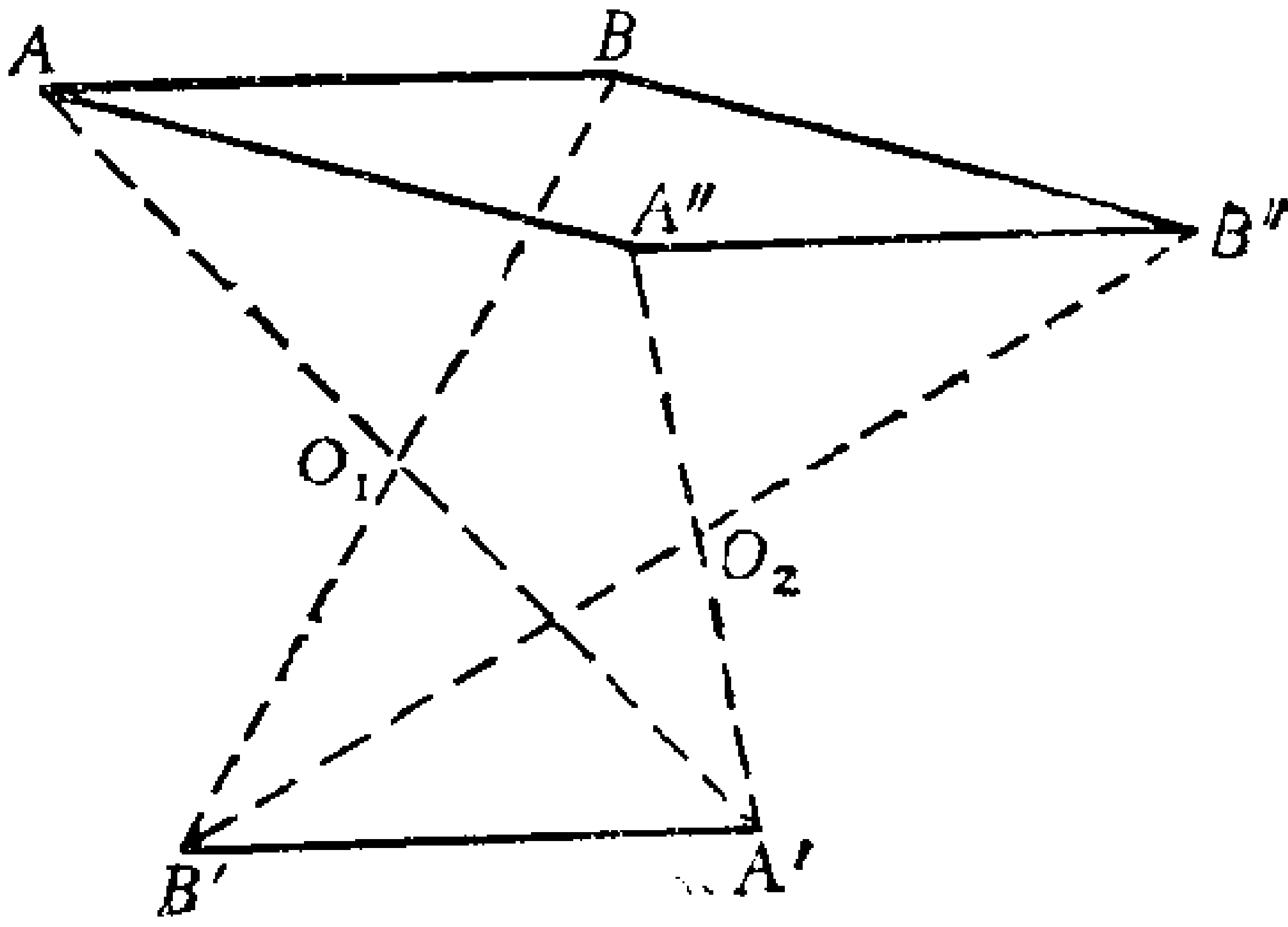


图 4.3A

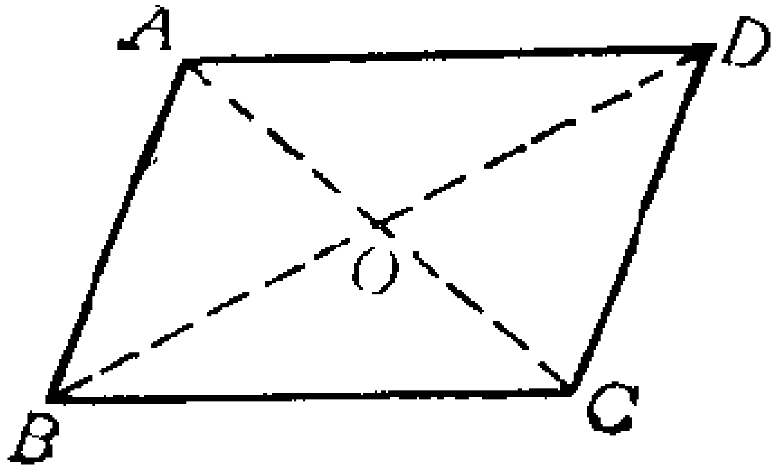


图 4.3B

许多熟知的定理用中心对称可以证得更简单。在图4.3B中，O 是线段 AC 和 BD 的公共的中点。以 O 为中心的对称，把 AB 变 CD，因此 $ABCD$ 是平行四边形。又如图4.3C，M 和 N 是 AB 和 AC 的中点。显然，以 M，N 为中心的

对称之和是平行移动$\overrightarrow{M'M''}=\overrightarrow{BC}$，因此 MN 平行于 BC，并且它的长是 BC 的一半。

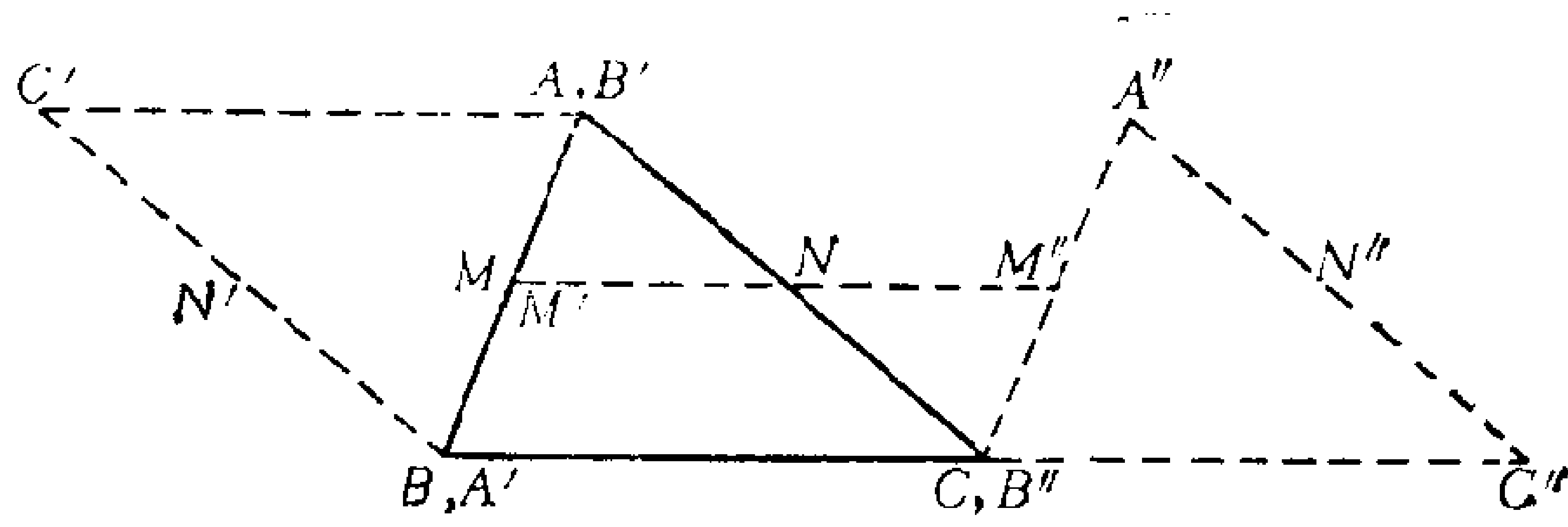


图 4.3C

习 题

1. 设 A 是两个相交圆的交点之一。经过 A 点作一条直线，使它被两个圆截出的弦长相等。

2. 经过已知圆外一点 A，作一条直线与圆相交于 P，Q 两点，使 $AP=PQ$。

3. 若六角形的各组对边平行且相等，则对角线(即相对顶点的连线)共点。

§4.4 反射

第三种保持距离不变的变换是关于直线 HK 的反射，这条直线称为镜子(或对称轴)。镜子上的每一点(例如 H,K)在反射下是不动的，即它们是自身的反射像。若点 A 不在镜子上，则它的反射像 A' 落在经过 A 点，且与镜子垂直的直线上，同时使 AA' 被镜子所平分。在图4.4A 中，线段 $A'B'$ 是线段 AB 的反射像。因为，容易证明：若 C 是直线 AB 上任意一点，则它的像点 C' 必定落在直线 $A'B'$ 上。梯形 $AA'B'B$ 的对角线 AB' 和 $A'B$ 是互为反射像的，所以它们的交点 X

是它自己的反射像，于是它必在镜子 HK 上。由对顶角的性质可知，$\angle AXH=\angle B'XK$，又因$\triangle BXK$和$\triangle B'XK$全等，$\angle B'XK=\angle KXB$，因此

$$\angle AXH=\angle KXB.$$

由此可见，从任意一点 A 出发到达镜子，再到位于镜子同一侧的已知点 B 的最短路径是折线 AXB. 理由是：如图 4.4B 所示，若在镜子上任取一点 Y，路径 $AY+YB=A'Y+YB$，因此它比直线段 $A'B=AX+XB$ 长。

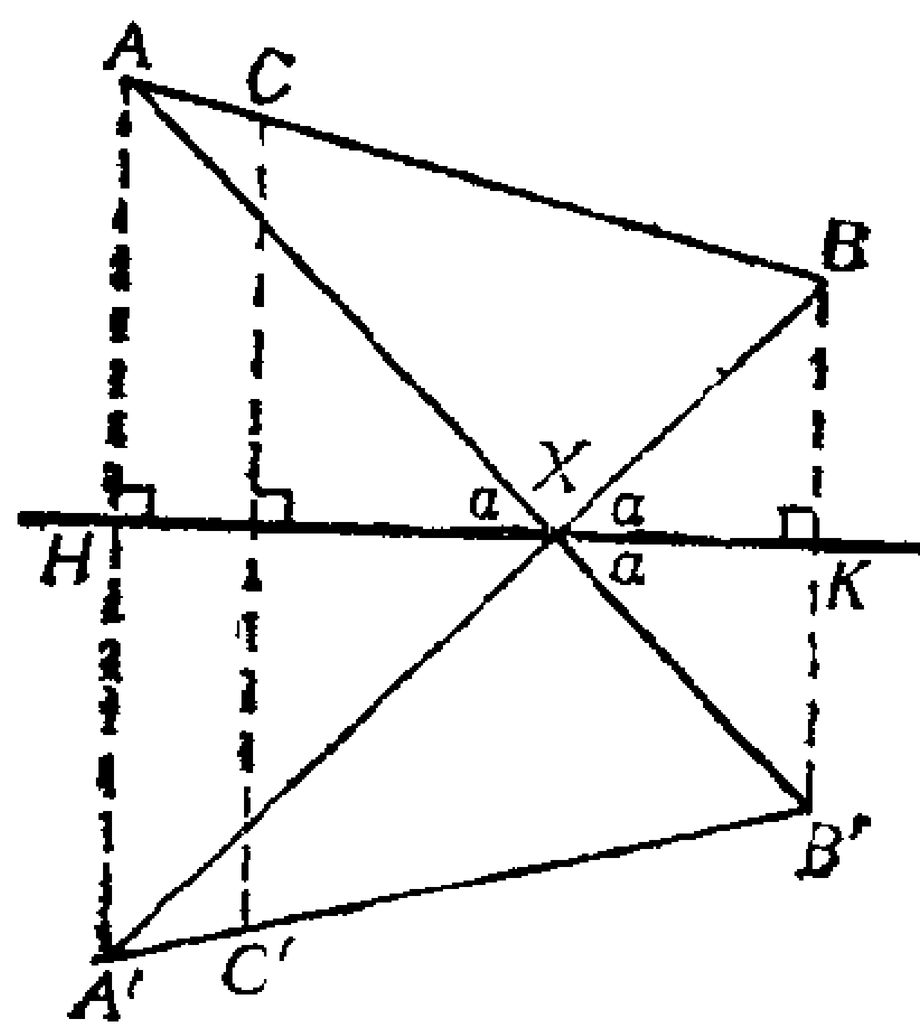


图 4.4A

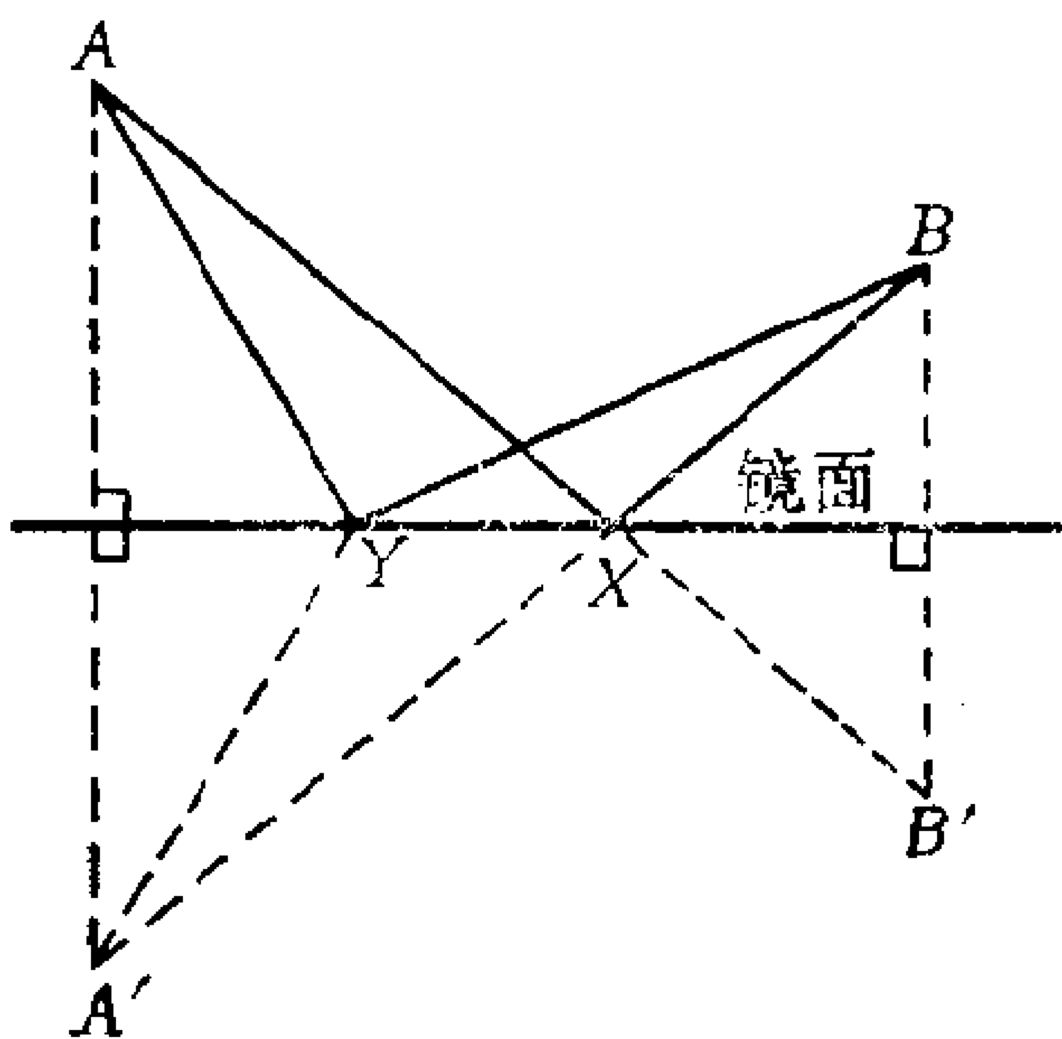


图 4.4B

这个事实顺便给出了对一个著名的极值问题不用微积分的几何解法。物理学家告诉我们，光线从 A 点走到镜子，再折回到 B 点是沿着一条行程时间最少的路径行进的. 在均匀介质中，光线的行程时间与距离成正比。所以当光线从 A 点出发到达镜子，再到达 B 点时，如果光线以 α 角与镜子相遇，则它以 α 角离开镜子。这是最短路径的推论。物理学家在习

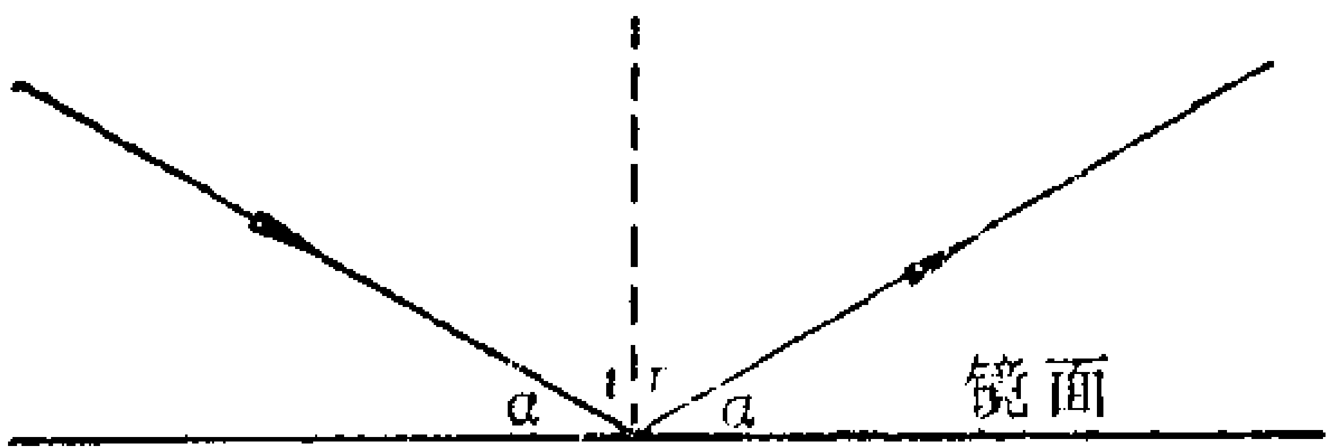


图 4.4C

惯上是量取光线与垂直于镜子的法线所成的角，而不用光线与镜子本身的夹角。在图4.4C中，$\angle i$叫做入射角，$\angle r$叫做反射角。

习　题

1. 已知不等边三角形ABC，假定它的各边都能反射光线。在AB边上什么地方安置一个光源，可以使从光源出发的一条光线依次经过其它两边的反射恰好回到光源，并且在AB上反射后又沿原方向射出？（提示：看§1.6）。

2. 如果保持三角形的底边和面积不动，则它的周长在三角形成为等腰三角时达到最小值。

3. 利用反射解答§4.3的习题1。

§4.5　法尼阿诺问题

从镜像反射的性质可以简单地、然而是引人注目地导出许多有趣的定理。我们现在要用这些性质来解在已知锐角三角形内，求作周长达到最小值的内接三角形的问题。这个问题称为法尼阿诺(Fagnano)问题①。

我们从任意的锐角三角形ABC着手(图4.5A)，在其中画两个内接三角形：一个是垂三角形(用短划虚线表示)，一个是任意三角形(用点虚线表示)。把$\triangle ABC$连同它内部的图形一起依次关于它的边AC, CB, BA, AC, CB作反射。我们

① 该问题是法尼阿诺在1775年提出的，并用微积分方法给出了解答。此处所讲的证明属于许尔瓦兹(H. A. Schwarz)。另一个利用反射的证明见考克瑟特(Coxeter)的[6, p. 21]、卡扎里诺夫(Kazarinoff)的[18, pp. 76—77]，或柯朗(Courant)和罗宾(Robbins)的[4, p. 347]。许尔瓦兹的证明被F. 莫莱和F. V. 莫莱推广到$(2n+1)$-角形的情形，看《反演几何学》(Inversive Geometry, Ginn, Boston (1933) p. 37)。

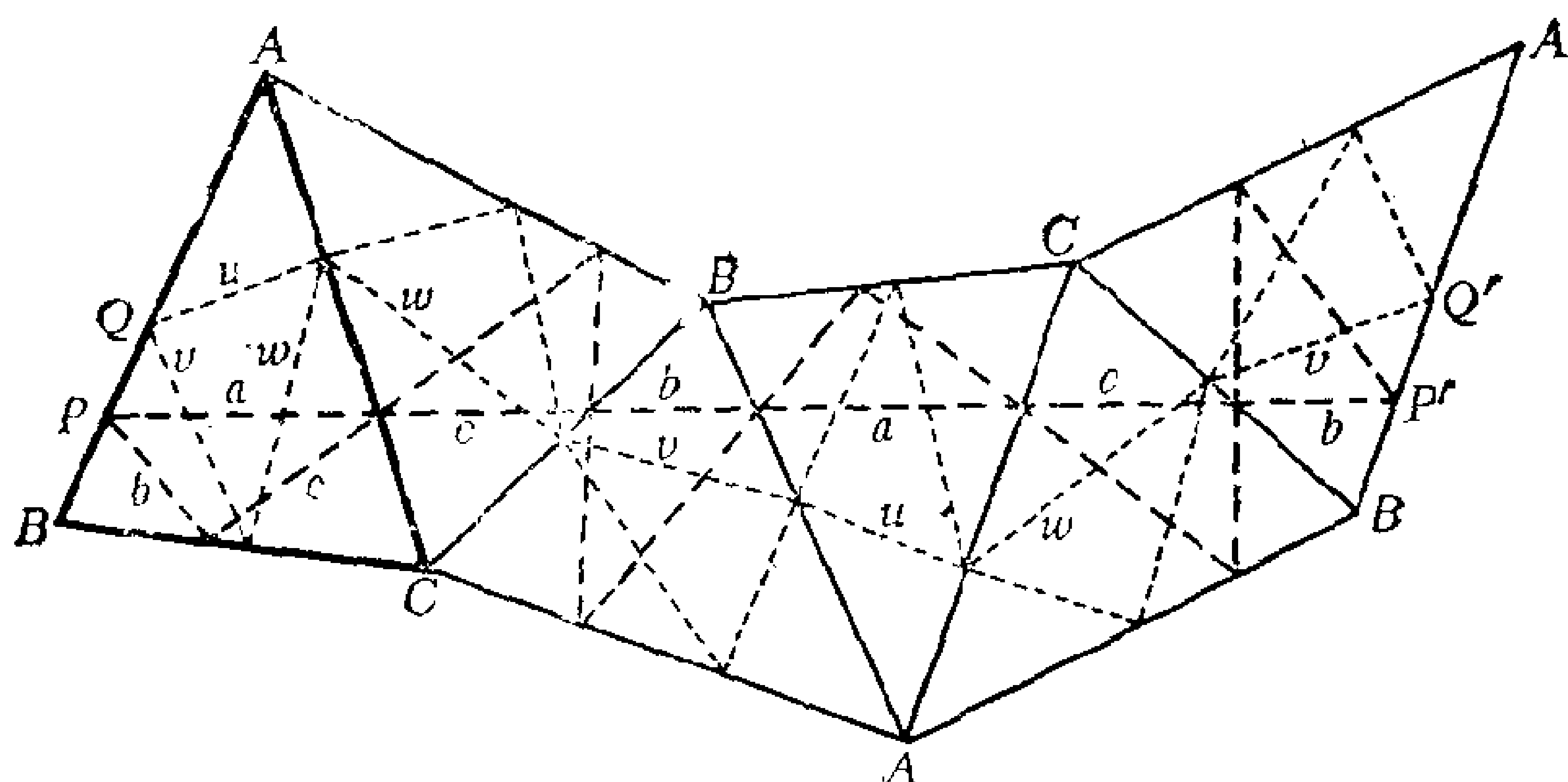


图 4.5A

来研究最后得到的图形，考察这个连续的反射序列对于这两个内接三角形各产生了什么结果。

去掉两个记作C的点，我们得到一条折线$BABABA$，它在第一个A点(左边的顶端)的角是$2A$(按反时针方向量取)，在第二个B点(中间点)的角是$2B$，在第二个A点(最低点)的角是$-2A$，在第三个B点(右边的点)的角是$-2B$。这四个角之和是零，因此最终的边BA与原来的边BA可以通过平行移动彼此重合，在这两条边上的两组对应点构成一个平行四边形，例如$PP'Q'Q$是平行四边形。

我们知道$\triangle ABC$的高线平分它的垂三角形的内角。因此在前面所述的反射下，垂三角形的各边落在直线PP'上，如图4.5A所示。同时，用点虚线表示的任意内接三角形的各边构成一条从Q点(在原来的AB边上)到Q'点(在最终得的AB边上)的折线。因为PQ平行且等于$P'Q'$，故线段QQ'等于PP'，后者正好是垂三角形周长的两倍。显然QQ'比从Q到Q'的折线的长度短，也就是比点虚线表示的任意一个内接三角形的周长的两倍短。因此，周长最短的内接三

角形是垂三角形。

§4.6 三罐问题

反射还可以巧妙地用来解决把液体用无刻度量具分出一定份额的问题①。为此，需要一些关于三重线性坐标的知识；我们先从引进三重线性坐标着手。

普通的方格纸常用来描绘已知笛卡儿坐标的点。有时还能买到有三角形格子的纸，上面有三组平行线，把平面划分成如棋盘形状的一些小的等边三角形。用这种纸来描绘关于一个(大)等边三角形有给定的三重线性坐标的点是极为方便的。在一个边长为 a，高为 h 的等边$\triangle ABC$ 所在的平面上，点 P 的三重线性坐标定义为点 P 到边 BC, CA, AB 的距离 x, y, z，而且当 P 在三角形内部时，规定这些距离是正的。我们把点 P 称为点(x, y, z)。因为

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = (PBC) + (PCA) + (PAB)$$

$$= (ABC) = \frac{1}{2}ah,$$

故

$$x + y + z = h.$$

用这种坐标表示其和为常数的三个变量所处的任意一个状态是很理想的。若固定一个变量，而让其它两个变量变化(保持它们的和为常数)，则点(x, y, z)沿着平行于三角形一边的直线移动。特别是三条边本身的方程是

---

① M.C.K.Tweedie, *Mathematical Gazette* 23(1939), pp.278—282; A.I.Perel'man, Zanumatel'naya Geometria (Moscow,1958); T.H.O'Beirne[21], pp.49—75.

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,$$

而顶点 A,B,C 的坐标是$(h,0,0)$，$(0,h,0)$，$(0,0,h)$。

把 h 品脱（或盎斯[1]）液体分放在三个容器内，使第一个容器有 x 品脱，第二个容器有 y 品脱，第三个容器有 z 品脱，这就是应用三重线性坐标的一个例子。把液体从第二个容器倒入第三个容器的过程恰好是点(x,y,z)沿着直线 $x=$ 常数朝着 y 减小的方向（也就是 z 相应地增大的方向）移动的过程。如果每一个容器都能盛放 h 品脱的液体，则每个坐标都能取到从 0 到 h 的任意值，这样的问题记作$[h;h,h,h]$（这是平凡的），其中操作的范围是整个的三角形区域

$$0\leqslant x\leqslant h,\quad 0\leqslant y\leqslant h,\quad 0\leqslant z\leqslant h.$$

最有意思的问题是$[h;a,b,c]$，其中 $h\geqslant a>b>c$。现在，三个容器的容量分别是 a,b,c，而问题是：把液体反复地从一个容器倒入另一个容器，或者把前者倒空，或者把后者灌满（也可能这两种情形同时发生），最后要求分出一定量的液体。操作的范围现在限于

$$0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad 0\leqslant z\leqslant c.$$

一般说来，它是由六条直线

$$x=0,\quad x=a,\quad y=0,\quad y=b,\quad z=0,\quad z=c$$

围成的六角形，但也可能退化成五角形、梯形、平行四边形或整个等边三角形（前面提到的问题就属于这种情形）。

作为例子，图4.6A 和图4.6B 是问题[8；7,6,3]的图解。在这种情形，8 品脱液体分盛在容量分别是7,6,3的三个容器中，我们想要量出（比方说）4 品脱液体。现在，操作范围是六角形区域

---

① 品脱(pint)和盎斯(ounce)都是液量单位，1 品脱≈0.56826升。英制：1 品脱＝20盎斯；美制：1 品脱＝16盎斯。——译者

$$0\leqslant x\leqslant 7,\qquad 0\leqslant y\leqslant 6,\qquad 0\leqslant z\leqslant 3.$$

它由六条直线

$$x=7,\ z=0,\ y=6,\ x=0,\ z=3,\ y=0$$

围成，顶点是

$$(7,1,0),\quad (2,6,0),\quad (0,6,2),\quad (0,5,3),$$
$$(5,0,3),\quad (7,0,1),$$

或简记为710,260,062,053,503,701.

在图4.6A 中特别注意一种典型状态332：在头两个容器里都盛有 3 品脱液体，而第三个容器里有 2 品脱液体。从这点出发的虚线代表六种可能的操作。从332到530的路径表示，把最后一个容器中的液体全部倒入第一个容器；从332到233的那条相反的路径表示，用第一个容器里的液体倒满第三个容器；从332到062的路径表示，把第一个容器倒空，全部注入第二个容器，同时把第二个容器注满了。

图4.6B 中的绫纹线给出了一条从332到440的路径，它把 8 品脱液体分成两个相等的部分。整条路径是一条折线，它总是沿着与参照三角形的边平行的方向行进，而且只在它到达围成操作范围的六角形的边或顶点时才能拐弯。按照同

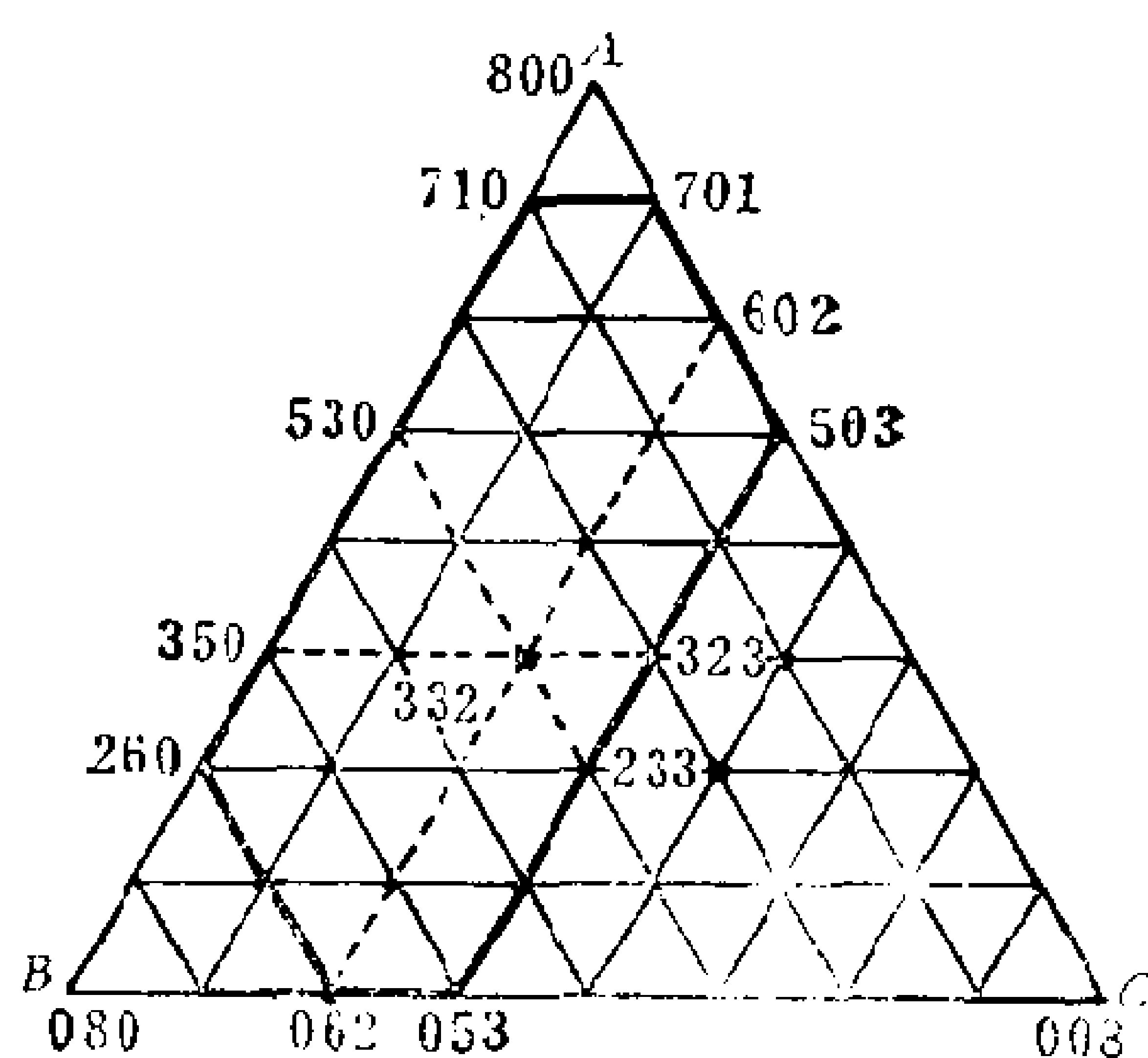


图 4.6A

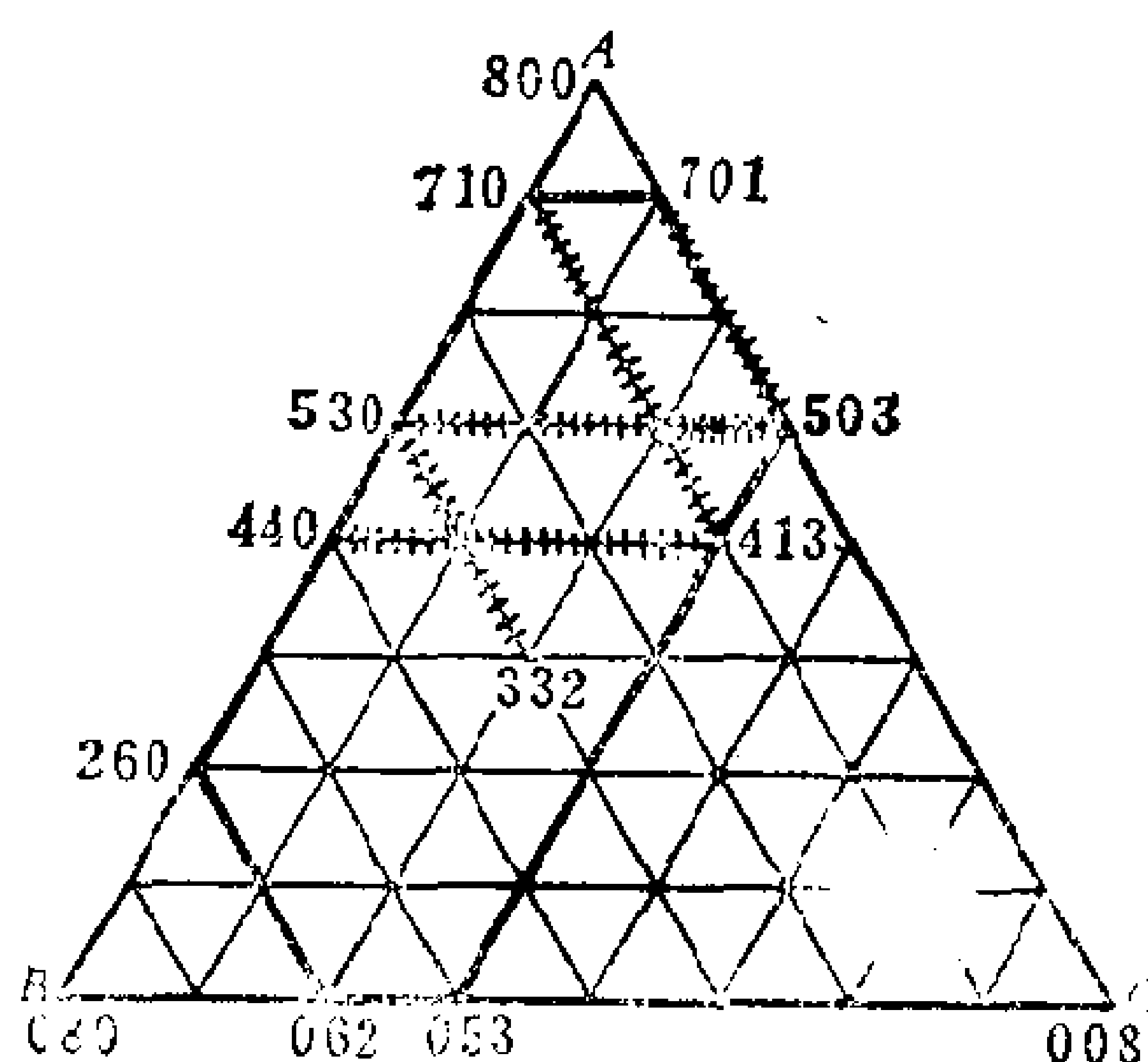


图 4.6B

样的规则越过440继续走下去，最终我们会到达该范围的边界上所有整数坐标的点；因此，在问题[8；7,6,3]中，任意一个(不超过 8 品脱的)整数品脱都能量出来。

图4.6C 解释了问题[10；8,7,6]，其中10品脱液体要用容量分别为8,7,6品脱的容器来分。我们能够容易地量出1,2,3,4品脱；但是却得不到 5 品脱(除非有个容器一开始就放了 5 品脱液体)，因为055,505,550三点构成一条三角形路径，沿着它绕行形成了一个恶性循环圈，从其它路径走不到这个圈子里来。对于问题[h；a,b,c]，只要

$$h=2d\geqslant a>b>c>d,$$

就会出现这种现象。

另一种稍有不同的现象发生在问题[10；8,6,4]中(图4.6D)，这时过550的路径是由小等边三角形和正六角形构成的图案。这就说明，用容量都是偶数的容器量不出奇数品脱的液体。当a,b,c有大于 1 的公因数时，在问题[h；a,b,c]中便会出现这种麻烦。

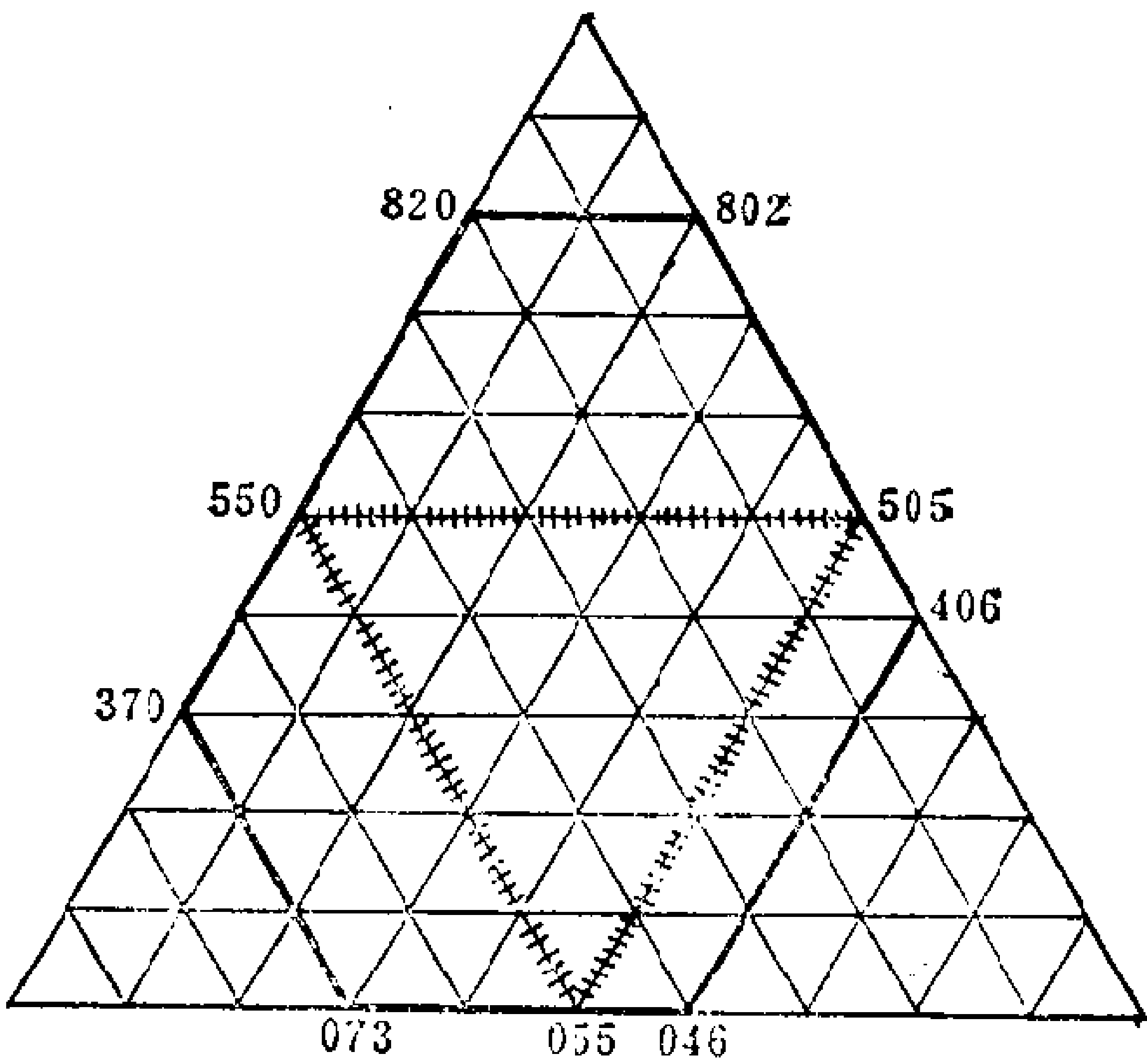


图 4.6C

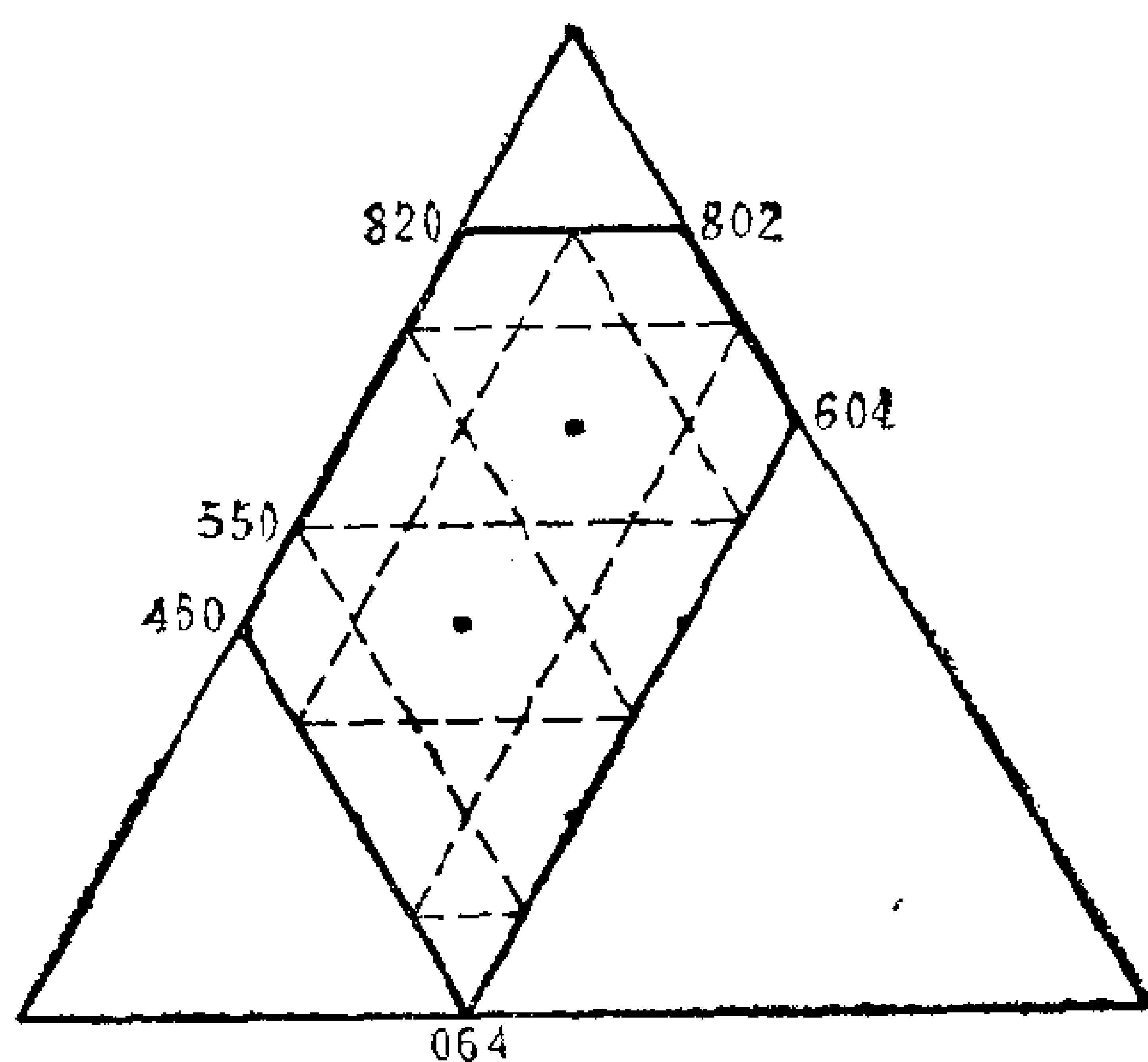


图 4.6D

最著名的问题[h; a,b,c]是

$$h=a=2d=b+c,$$

操作范围由顶点是 $a00, cb0, 0bc, b0c$ 的平行四边形围成的。图4.6E 和图4.6F 给出了问题[8; 8,5,3]的 7 个步骤的解和 8 个步骤的解。该问题可叙述为：两个人有一个装满了 8 品脱液体的容器，还有两个容量分别为 5 品脱和 3 品脱的空容器。他们想要平分这 8 品脱液体。

第一步是灌满 5 品脱容器，如图4.6E；或者灌满 3 品脱容器，如图4.6F。以后在路径到达平行四边形(操作范围)的各边所在的直线 $y=0$，$y=5$，$z=0$，$z=5$时，以这些直线为镜子反射回去。换句话说，我们取弹球行进的路线：开始时，弹球是沿着这个形状独特的台盘的一条边打出的（表现为反射法则的原因是，折线的每一段要平行于参照三角形的边，

这代表了液体从一个容器倒入另一个容器，而第三个容器保持不动的操作)。这样，我们得到的 7 个步骤的解是

800，350，323，620，602，152，143，440；

8 个步骤的解是

800，503，530，233，251，701，710，413，440。

显然，这类问题($a=b+c$)在 b 和 c 互素时，即 b 和 c 没有大于 1 的公因数时，总是有解的。

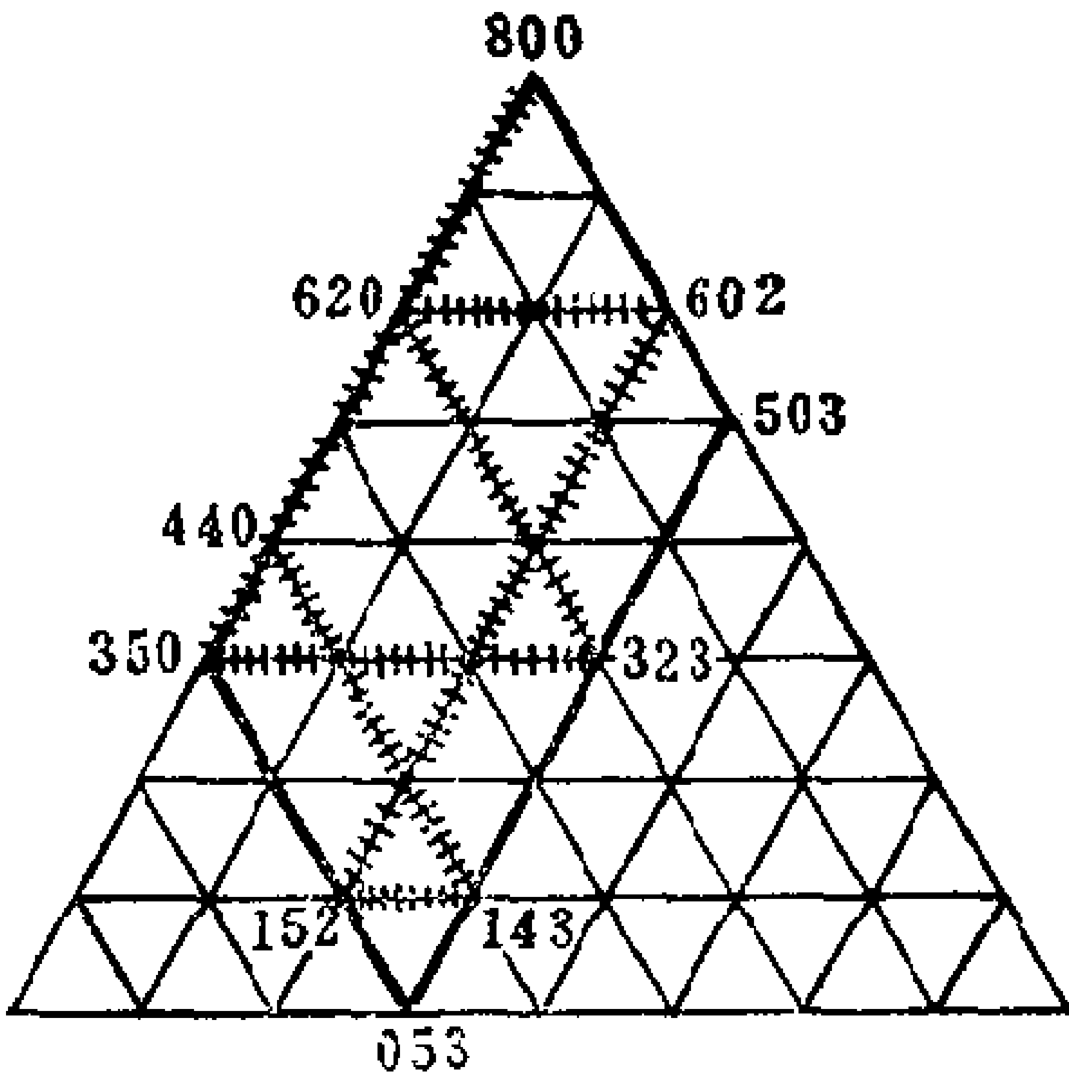


图 4.6E

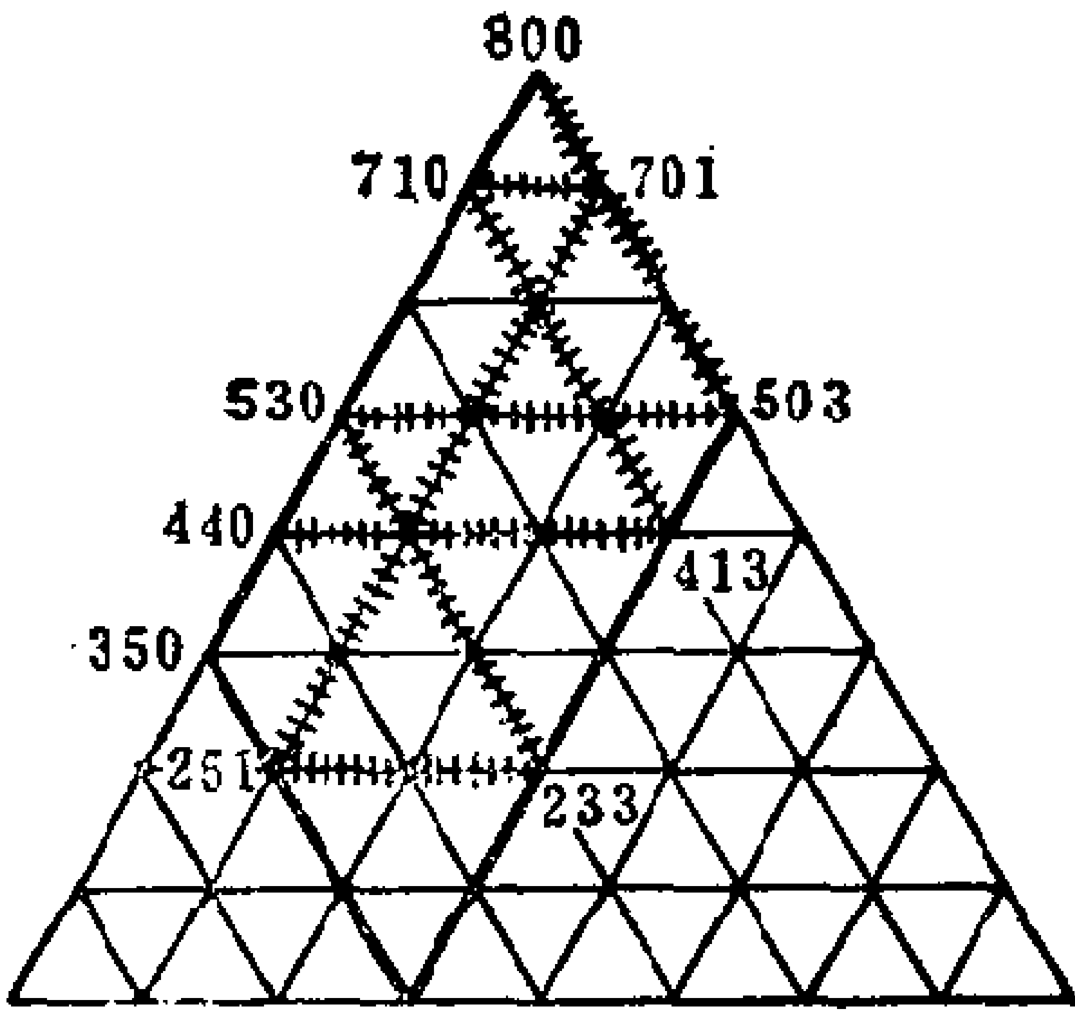


图 4.6F

习　　题

1. 我们有一个12品脱的容器装满了液体，另有两个容量分别是 9 品脱和 5 品脱的空容器。如何把液体分成两个相等的部分？

2. 三个强盗抢走了一个人的瓶子，其中装有24盎斯的香液。在逃跑的时候，他们遇到一个卖玻璃瓶的商人，买了三个瓶子。在到达安全地之后，他们想要分掉所得的赃物，但是发现他们的瓶子只能分别盛放13盎斯，11盎斯和 5 盎斯。他们怎样才能把赃物均分为三份[1, PP.28, 40]？

3. 设两点P和P'关于三角形ABC有三重线性坐标(x,y,z)和(x',y',z')。如果它们满足方程

$$xx'=yy'=zz',$$

则这两点是等角共轭的，即

$$\angle P'AC=\angle BAP, \qquad \angle P'BA=\angle CBP,$$
$$\angle P'CB=\angle ACP.$$

§4.7 位似变换

至今所讨论的变换有一个共同的特征：它们把每一个图形变到与它合同的图形。保持距离不变的变换叫做合同变换，或等距变换。

然而，把每一个图形变成与它相似的图形的变换有更多的用处。相似变换虽然会改变距离，但是它却保持夹角不变，并且所有的距离都以同一个比值增大(或缩小)，这个比值叫做放大倍数或相似比。这样，当线段AB变成线段$A'B'$时，它的长度就是

$$A'B'=kAB.$$

比值k可以大于1，也可以等于1或小于1。后两种情形与“放大”一词显然是不相称的。相似变换也包括等距变换，作为特例，这时$k=1$。

如果相似变换定义为保持距离之比不变的变换，则上面这些话就可以说得更贴切了。相似变换定义本身蕴含着既保持共线性，又保持夹角不变。

最简单的一种相似变换是位似变换，它把每一条直线变成它的平行线。非平行移动的位似变换叫做中心相似变换。这时，联结对应点的直线都共点。为此只要考察图4.7A和图4.7B，其中对应的线段AB和$A'B'$(位于平行的直线上)

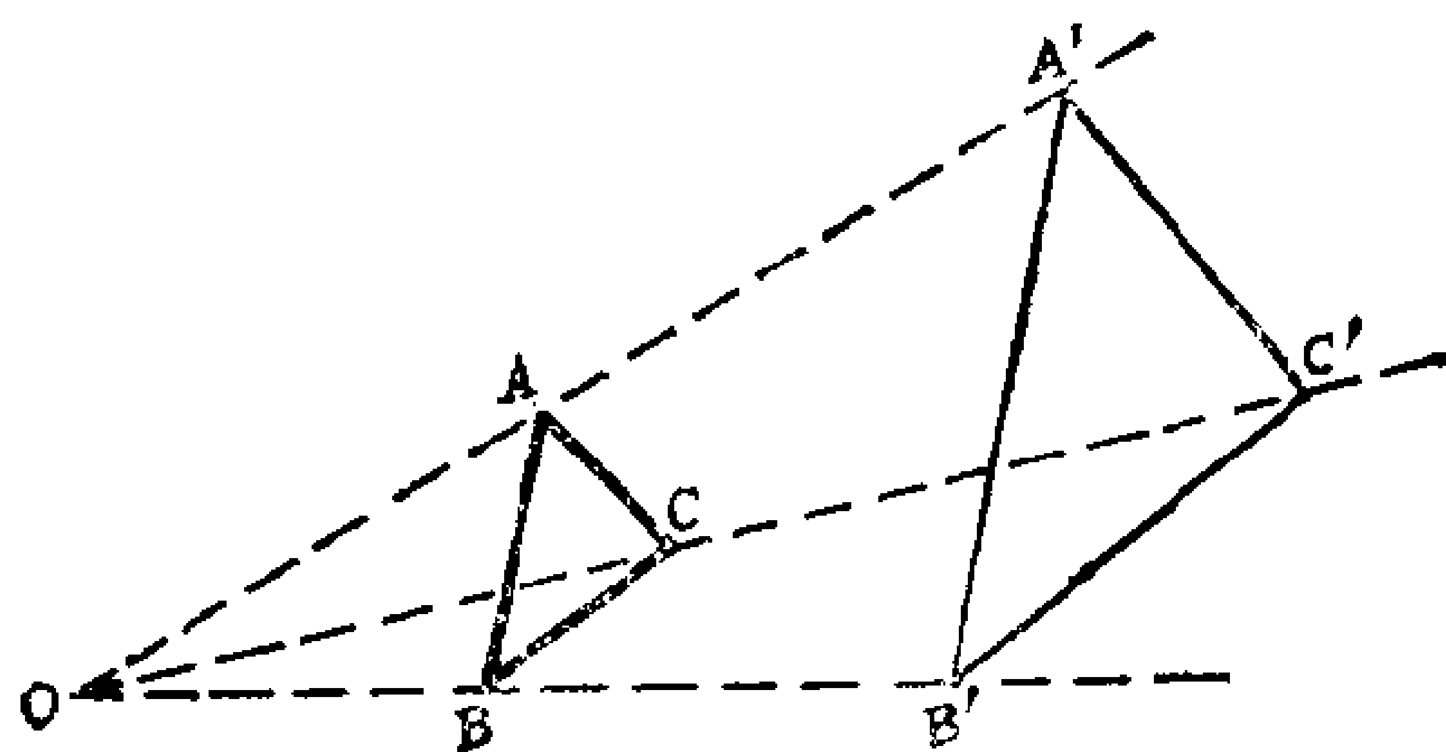


图 4.7A

满足向量方程

$$\overrightarrow{A'B'}=\pm k\overrightarrow{AB},\quad k>0.$$

设点 C 和 A, B 成一个三角形，它的像点 C' 是过 A' 平行于 AC 的直线与过 B' 平行于 BC 的直线的交点。如果该位似变换不是平行移动，则直线 AA' 和 BB' 不平行，不妨假定它们的交点是 O。因此，在图4.7A 的情形有

$$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}.$$

在图4.7B 的情形有

$$\overrightarrow{OA'}=-k\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OB'}=-k\overrightarrow{OB}.$$

由于平行线把截线分为成比例的线段，易知点 C' 落在 OC 上，事实上，我们有

$$\overrightarrow{OC'}=\pm k\overrightarrow{OC}.$$

在图4.7A 中，如果把点 O 引向左边越来越远，则 $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ 中的 k 就逐渐趋于 1，这时中心相似变换就变成平行移动了。同样，如果在图4.7B 中，使点 O 是 AA' 的中点，则中心相似变换 $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$ 就变成中心对称变换了。这时，$ABA'B'$ 是以 O 为中心的平行四边形。

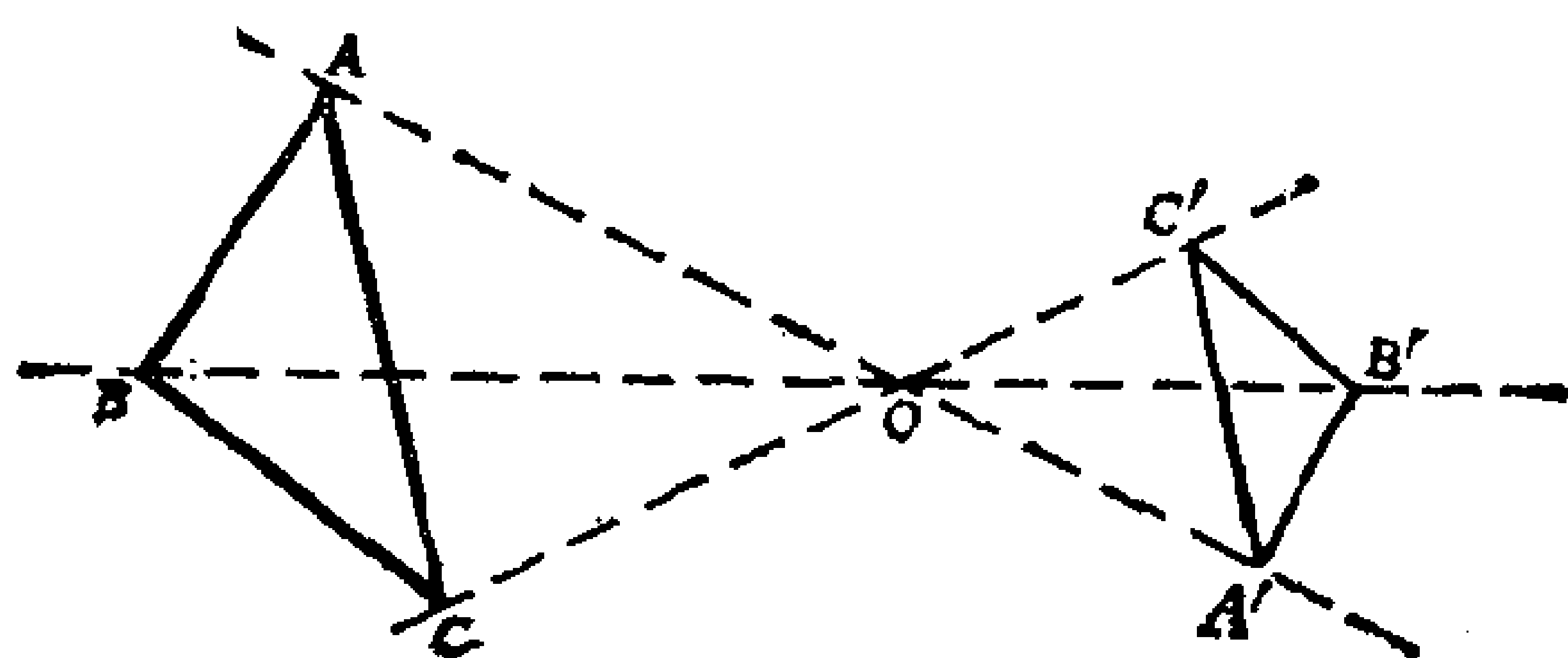


图 4.7B

习　题

1. 一条长度可变的线段，如果有一个端点固定，而另一个端点绕一个圆周运动，则它的中点轨迹是什么？

2. 已知锐角三角形ABC，求作一个正方形，使它的一条边在BC上，另外两个顶点分别在CA和AB上。

§4.8 旋转相似变换

如果把一个图形先作位似变换，再经过一个平行移动，则最后的图形与原图形的对应直线是互相平行的，所以结果是一个位似变换。同理，任意两个位似变换的和(即两次位似变换连续作用的结果)仍然是一个位似变换。但是，如果把一个图形先作位似变换，再经过一个旋转，则对应的直线就不再彼此平行了。因此，位似变换与旋转(除去恒同变换和中心对称这两种情形)的和不是位似变换，但是它仍保持角的大小和符号不变(保持角的符号不变的相似变换叫做正相似变换)。

中心相似变换与绕同一个中心的旋转之和称为旋转相似变换。这种变换虽然不大闻名，但可以用来解决许多问题。

如图 4.8A，若以O为中心的旋转相似变换把AB变到

$A'B'$，则$\triangle OAB$和$\triangle OA'B'$是正相似的，且

$$\angle AOA' = \angle BOB'.$$

此外，和位似变换的情形相同，它的放大倍数是

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}.$$

既然旋转相似变换是由它的中心 O，放大倍数 k 和旋转角 θ 决定的，我们可以把它记成

$$O(k, \theta)。$$

(按照惯例，逆时针方向的旋转角是正角，顺时针方向的旋转角是负角)。特别，$O(k, 0°)$ 和 $O(k, 180°)$ 分别是图4.7A和图4.7B表示的中心相似变换，$O(1, \theta)$就是旋转。

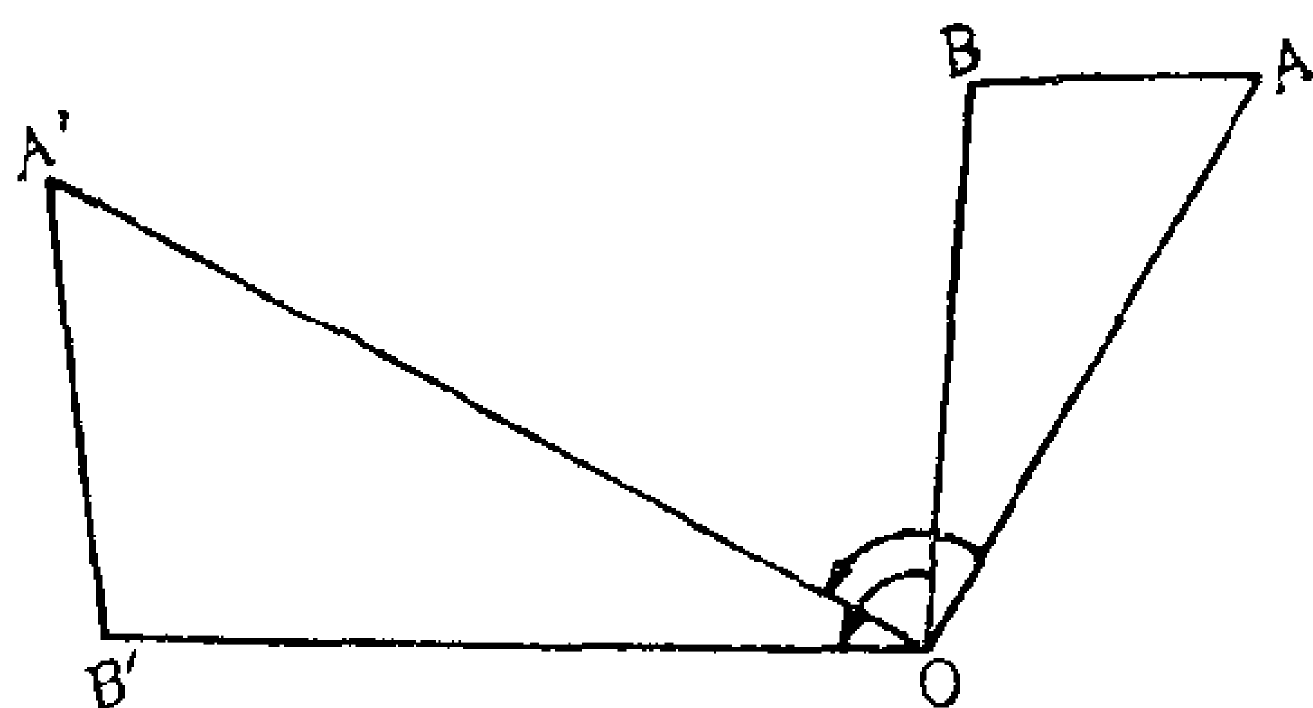


图 4.8A

作为旋转相似变换的应用的例子，我们证明

定理4.8.1 若在$\triangle ABC$的边 BC, CA, AB 上向外侧作正方形，它们的中心分别是O_1, O_2, O_3，则线段O_1O_2垂直且等于CO_3。

用图4.8B的记号，旋转相似变换 $A(\sqrt{2}, 45°)$把$\triangle CAO_3$变到$\triangle KAB$，旋转相似变换$C(\sqrt{2}, -45°)$把$\triangle O_1CO_2$变到$\triangle BCK$。因为这两个变换分别把O_3C和O_1O_2变到同一条线段BK，而且两个变换有相同的放大倍数，因此，原三角形的这两条对应边本来就应该是相等的。因为这两个变换的旋转

角分别是45°和-45°，而且O_3C和O_1O_2的像的夹角是0°，所以这两条线段原来必定是垂直的。(注意，因为AO_1，BO_2，CO_3分别是$\triangle O_1O_2O_3$的高线，所以它们是共点的。)

我们已把旋转相似变换定义为中心相似变换与绕同一个中心的旋转之和，很自然地要问：中心相似变换与绕另一个

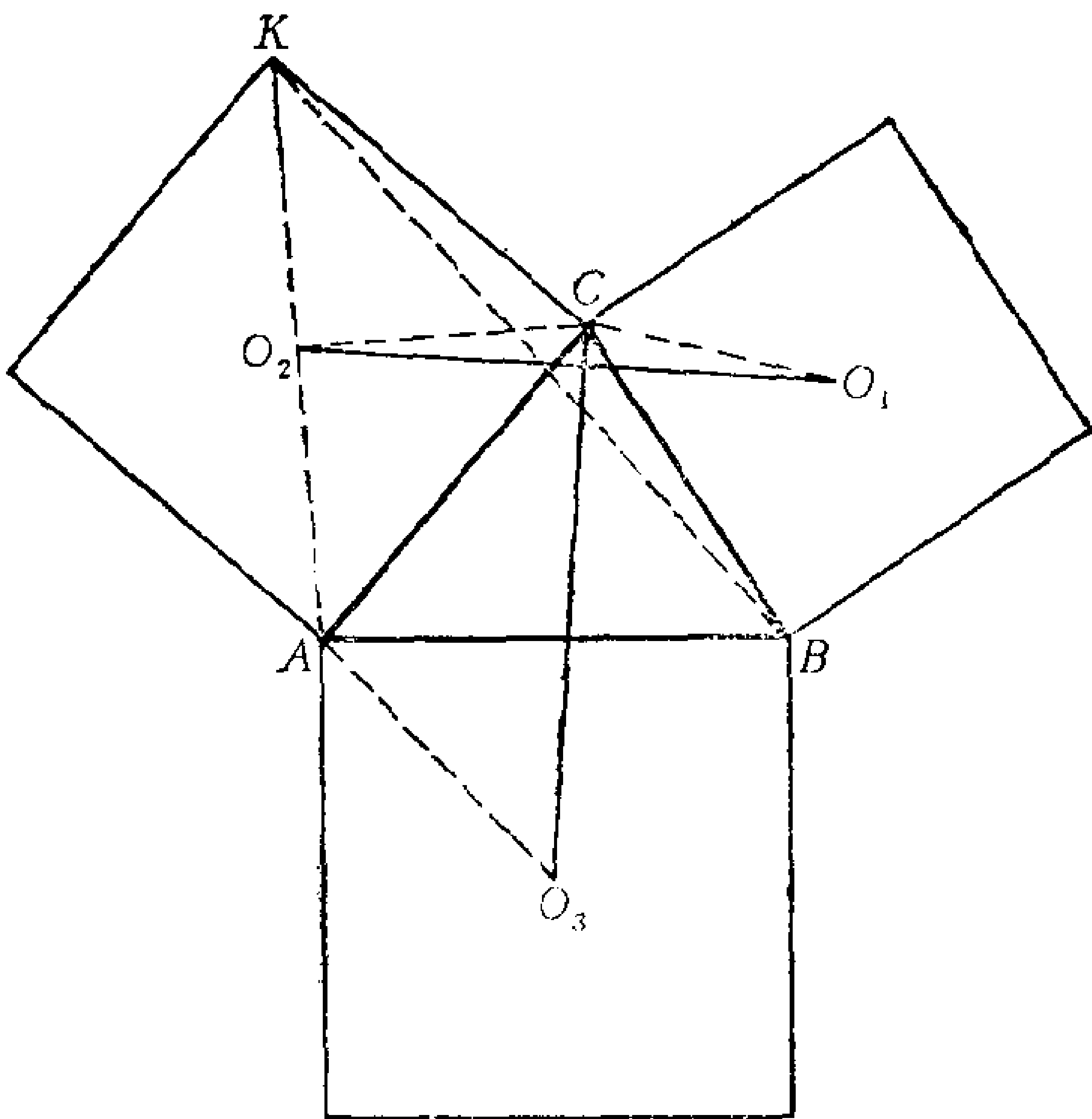


图 4.8B

中心的旋转之和是什么样的变换？答案是简单的，又出人意料的：它们的和仍是一个旋转相似变换。原因是不存在更为复杂的正相似变换。

定理4.8.2 任意两个正相似图形，或者在平行移动下是互相关联的，或者在旋转相似变换下是互相关联的。

为此，考虑正相似图形的两条对应边AB和$A'B'$。若AB平行且等于$A'B'$，则该变换是平行移动。为证明这一点，任取不在AB上的一点C，设它的像点是C'。从图形的

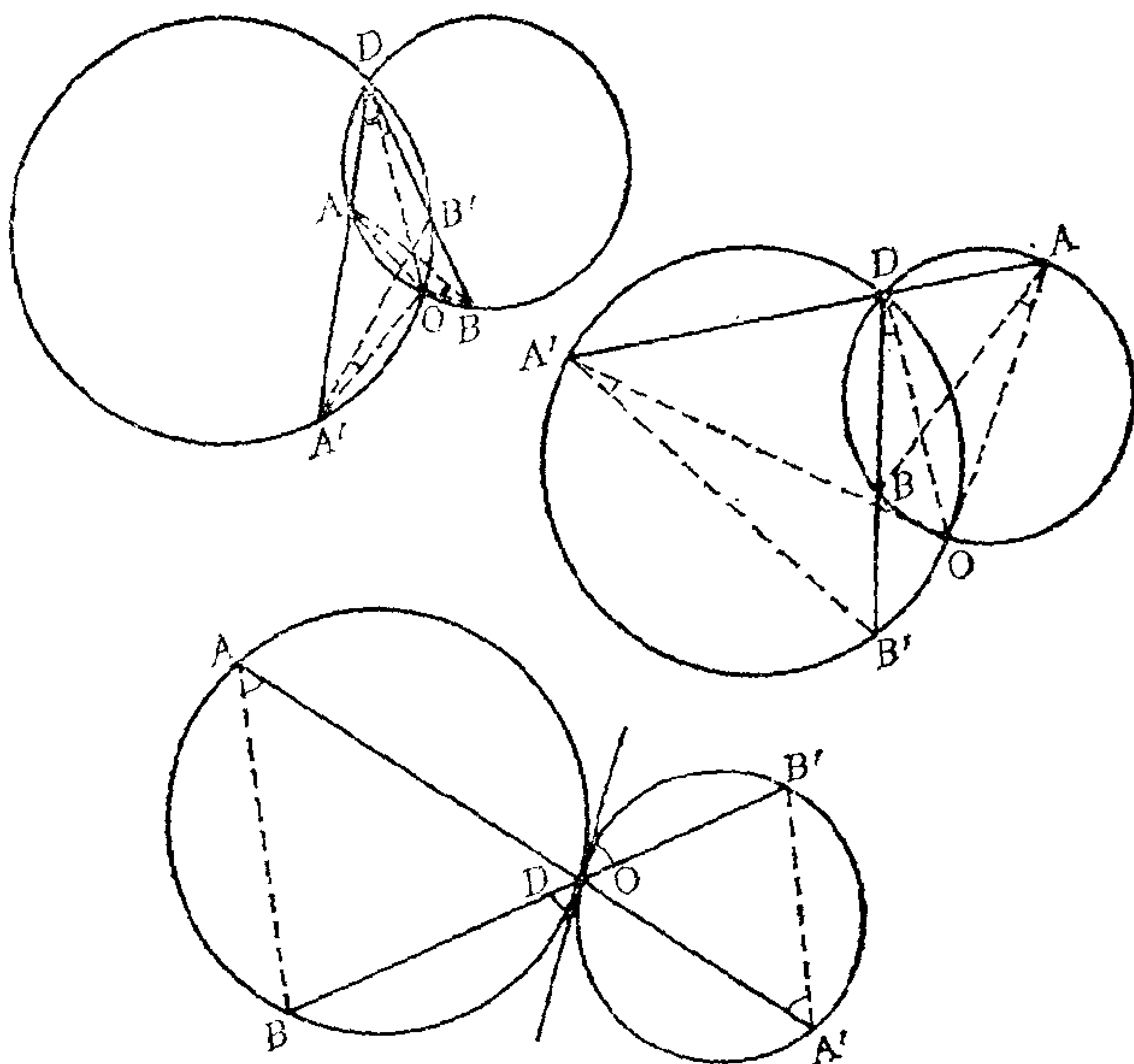


图 4.8C

正相似性可知，三角形ABC和$A'B'C'$是合同的，它们的对应边彼此平行。因此联结对应点的线段都互相平行且相等，于是该变换是平行移动。

其次，假定线段AB和$A'B'$的长度不相等。（总是可以假定A,B,A',B'构成一个四角形。若不然，则可取一对新的对应线段，使它们的端点构成四边形，然后再把它们命名为AB和$A'B'$。例如在图4.8D上，点B在AA'上，则只要用AB的中点代替A，用$A'B'$的中点代替A'。）AA'和BB'相交于D，如图4.8C。圆ABD和圆$A'B'D$除公共点D之外，还有一个公共点记作O（若这两个圆在D点相切，则把D点又称作O点）。比较角OAB,ODB,ODB'和$OA'B'$，则得$\angle OAB=\angle OA'B'$。同理，$\angle OBA=\angle OB'A'$。这样，$\triangle OAB$和

$\triangle OA'B'$ 是正相似的，它们在旋转相似变换 $O(k,\theta)$ 下是彼此关联的，其中

$$k=\frac{OA'}{OA},\qquad \theta=\angle AOA'.$$

换言之，非平行移动的正相似变换必有一个不动点，而且只有一个不动点。实际上，如果有两个不动点 A 和 B，则就有一条不动的线段。因为

$$k=\frac{AB}{AB}=1,$$

故这个相似变换必定是保持两点不动的等距变换。若该变换把三角形 ABC 变到 ABC'，则 C' 在以 A 为圆心，以 AC 为半径的圆上，也在以 B 为圆心，以 BC 为半径的圆上。这样，保持 A, B 两点不动的等距变换只有恒同变换和反射两种。前者是平行移动(移动距离为零)，后者不是正相似(因为它改变角的符号)，这与假定是矛盾的。

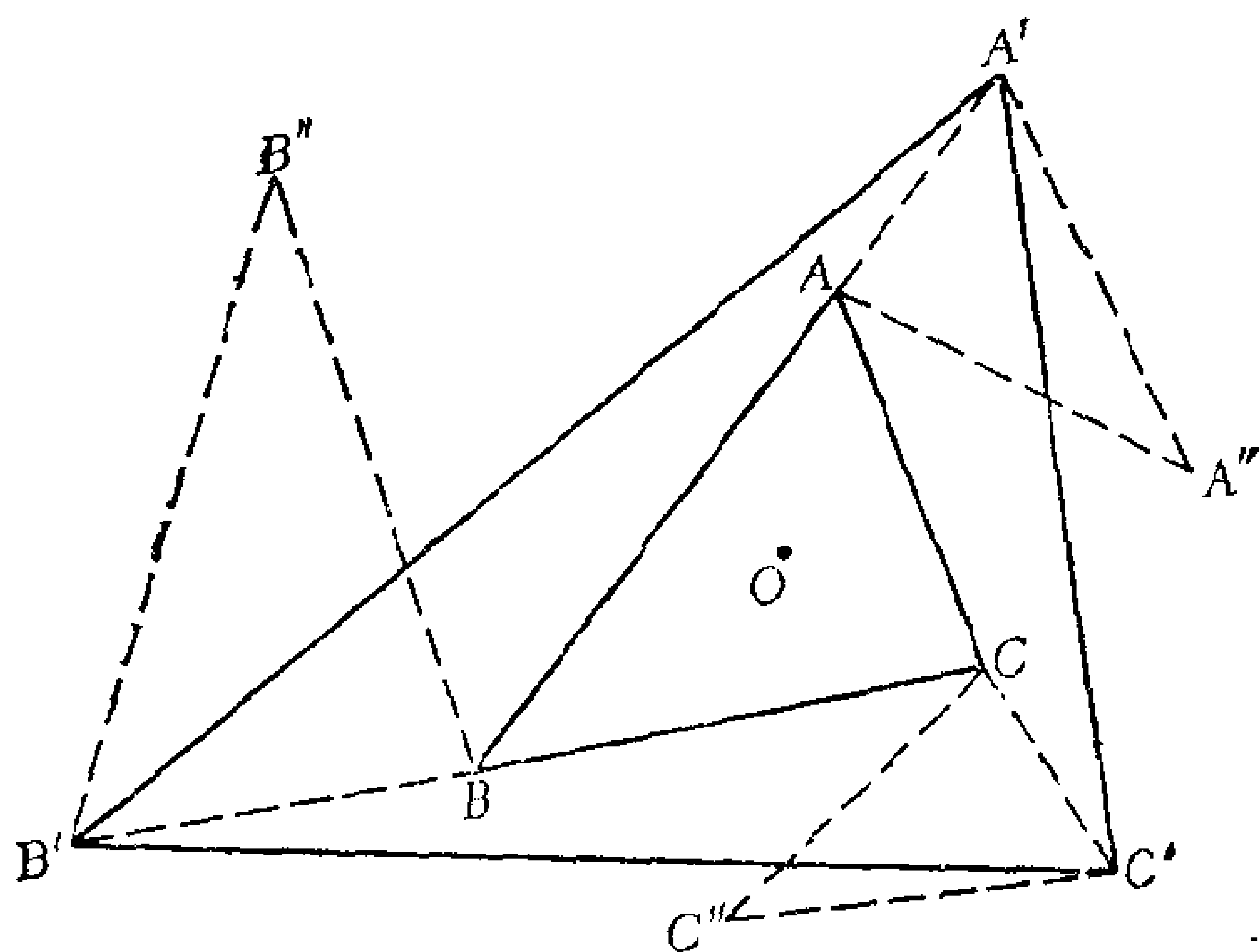


图 4.8D

作为例子，我们把同一个国家的两张比例尺不同的地图

画在描图纸上，再叠在一起①，则叠在一起的两张地图恰有一个公共点代表同一个地点。

这些想法被彼得逊(J. Peterson, 1880)和司各特② (P. H. Schoute, 1890)发展成一个十分漂亮的定理，下面的定理是它的一个特例：

定理4.8.3 若 ABC 和 $A'B'C'$ 是正相似三角形，并且 $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ 也是正相似三角形，则 $\triangle A''B''C''$ 和 $\triangle ABC$ 是正相似的。

若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 在平行移动下是合同的，则结果是显然的。若不是这种情形，则有唯一的旋转相似变换 $O(k,\theta)$ 把 $\triangle ABC$ 变到 $\triangle A'B'C'$，其中

$$k=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC},$$

$$\theta=\angle AOA'=\angle BOB'=\angle COC',$$

如图4.8D所示。由此得到

$$\triangle OAA'\sim\triangle OBB'\sim\triangle OCC'.$$

我们已假定

$$\triangle AA'A''\sim\triangle BB'B''\sim\triangle CC'C'',$$

故

$$\triangle OAA''\sim\triangle OBB''\sim\triangle OCC'',$$

$$\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\frac{OC''}{OC}=k',$$

$$\angle AOA''=\angle BOB''=\angle COC''=\theta'.$$

于是旋转相似变换 $O(k',\theta')$ 把 $\triangle ABC$ 变到 $\triangle A''B''C''$。

同理可证明彼得逊-司各特定理的另一特例：

定理4.8.4 若 AB 上所有的点 P 和 $A'B'$ 上的对应点

---

① "叠在一起"在这里是指比例尺较小的地图整个地落在比例尺较大的地图的内部。此时容易证明，旋转相似中心确实是这个国家内部的一个点。

② 看J. Peterson [25, p.74]和H.G.Forder [12, p.53].

P'在一个相似变换下是互相关联的，则把PP'分成已知比的点或者是共线的，或者重合为一点。

习　题

1. 若$\triangle ABC$在以A为中心的旋转相似变换下，使顶点B沿着BC移动，则顶点C沿着另一条直线移动。

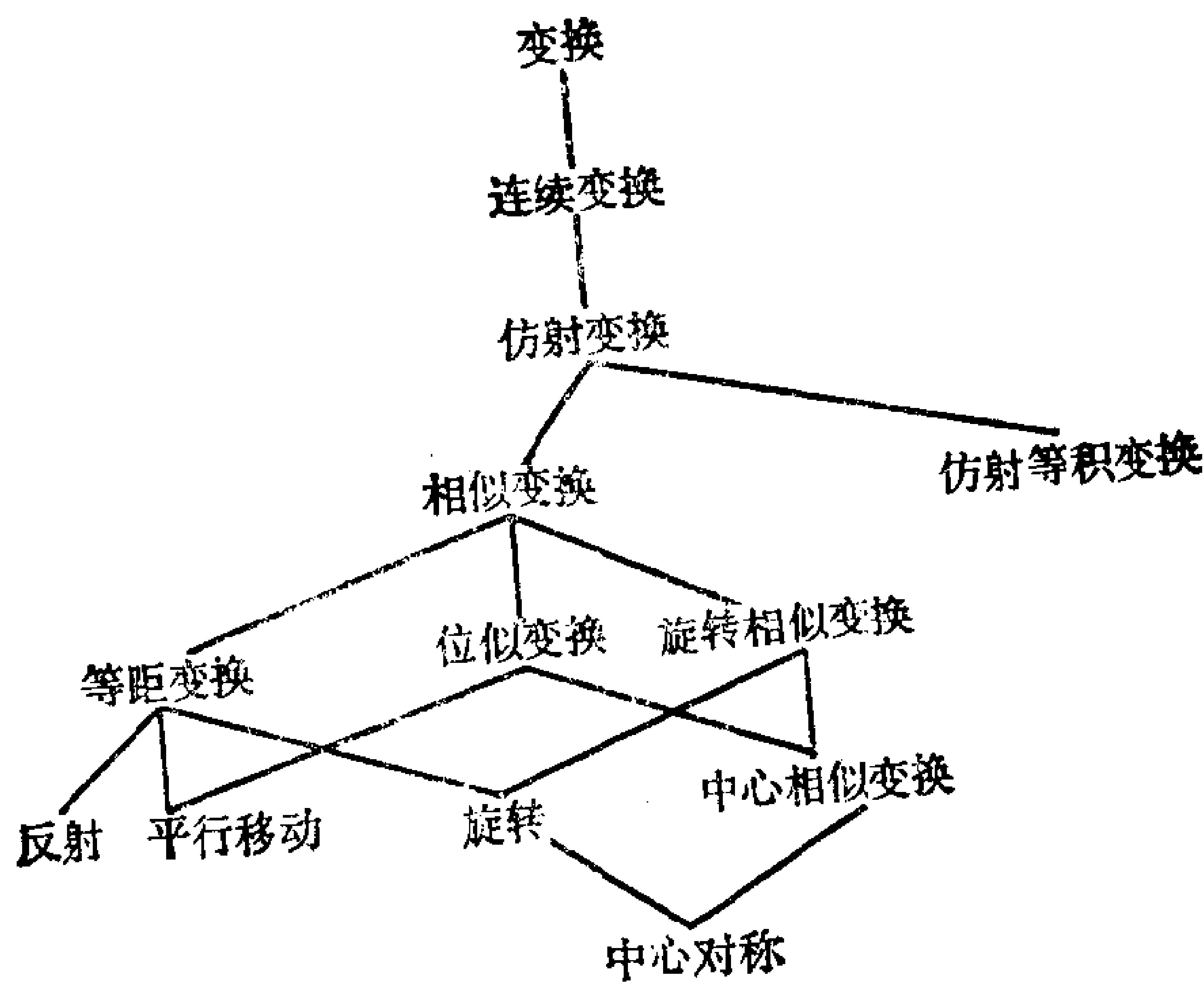
2. 若$\triangle ABC$是不等边三角形，则它的内拿破仑三角形$N_1N_2N_3$是逆行的，即它的定向与$\triangle ABC$和$\triangle O_1O_2O_3$是相反的(在§3.3中已不加证明地提到过这一事实)。

§4.9　变换的谱系

我们已经讨论过的变换都是平面上整个的点集到它自身的一一对应，这一点是十分要紧的。在这样的变换中，我们只考虑了连续变换(或"同胚")，即它们把邻近的点映到邻近的点①。在连续变换中(在某种意义下,这是奥厄(O. Ore)写的书[22]的主题)，我们只讨论了仿射变换，它们保持共线性不变,而且把平行直线变到平行直线。在仿射变换中,我们只考虑了相似变换，它们保持距离之比不变；而没有考虑诸如"洛仑兹(Lorentz)变换"或仿射等积变换(它把圆变成面积相等的椭圆)等那些更复杂的变换。我们讨论过的特殊的相似变换包括：等距变换,它保持距离不变；位似变换,它把每一条直线变成它的平行直线；旋转相似变换，它(和某种等距变换及某种位似变换一样)具有一个不动点，并且保持旋转的指向(反时针方向或顺时针方向)不变。这些变换类之间有部分是重叠的：在等距离变换中我们已考虑过反射，平

① 更确切的说，若A是任意一点，而A'是它在一个连续变换下的像点，那么只要B点充分接近A点，则B的像点B'就会落在围绕A'的任意一个小圆内。

行移动(由定义，它也是位似变换)和旋转(它也是放大倍数为1的旋转相似变换)。其余的位似变换就是中心相似变换(它同时是旋转角为0°的旋转相似变换)。最后，中心对称变换既是旋转(旋转角为180°)又是中心相似变换。所有这些关系可以简括成一张"谱系",其中每一个"子女"是其"父母"的特殊化。



习　题

在笛卡儿坐标系下，仿射等积变换把点(x,y)变到点(x',y')，其中$x'=kx$，$y'=k^{-1}y$。写出下列各变换的坐标表达式：

1. 把点$(0,0)$变到点(a,b)的平行移动。
2. 关于y轴的反射。
3. 关于直线$x-y=0$的反射。

4. 绕原点O作旋转角为180°的旋转。
5. 中心相似变换$O(k, 0°)$。
6. 旋转相似变换$O(k, 90°)$。
7. 本章未曾提及过的一个等距变换。
8. 本章未曾提及过的一个相似变换。
9. 一个非仿射的连续变换。
10. 一个非连续的变换。

第五章　反演几何学导论

我们在沙漠中放一个球状的笼子，走进去并锁上它。再作关于笼子的反演，则狮子就关在笼子里了，而我们却在笼子的外面。

H．皮塔德①

在本章我们要把关于变换是整个平面上的一一对应的限制稍微放松一点：容许恰好有一个点 O 在变换下沒有像。确切地说，我们考虑以 O 为圆心的一个固定的圆，以及关于这个圆的“反演”．在这样的变换下，通过 O 点的圆变成直线，而其余的圆仍旧变成圆．（这样，涉及到圆的问题往往由于某些圆变成直线而得到简化．更复杂的图形则在形状上会有根本的变化．）

§5.1　隔离性

下面这个定理被用作1965年的威廉·洛维尔·普特纳(W.L.Putnam)竞赛的一个问题，它是比较难的．我们的证法是从提交的各种解答中整理而成的．

定理5.1.1　若四个点 A,B,C,D 不全在一个圆上，也不全在一条直线上，则必有两个互不相交的圆，一个经过 A 和 C，另一个经过 B 和 D．

为证明这个定理，首先注意到线段 AC 的垂直平分线 p

① 在 *Am. Math. Monthly*, Aug.-Sept., (1938), pp. 446—447还有别的狩猎游戏．

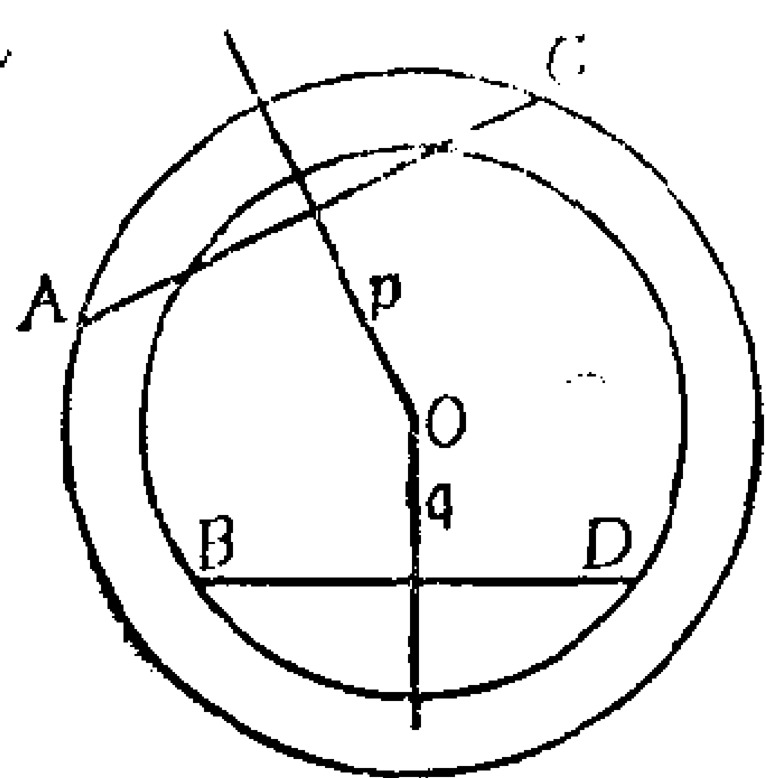


图 5.1A

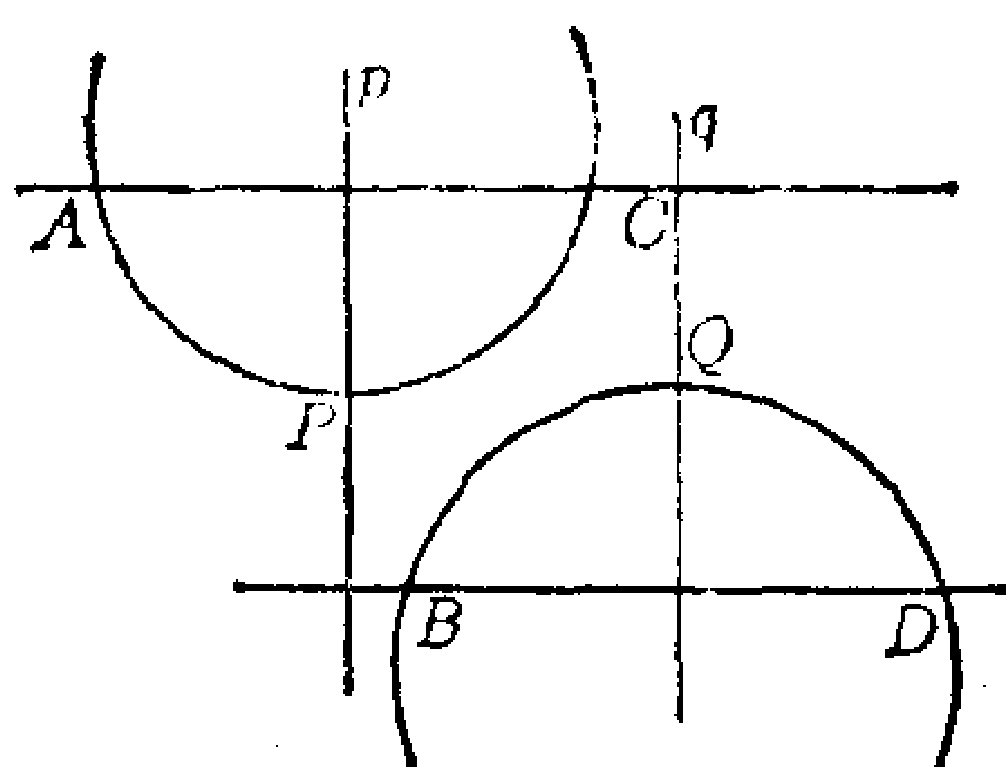


图 5.1B

与线段 BD 的垂直平分线 q 是不会重合的。若设直线 p 和 q 相交于 O 点，如图 5.1A，则以 O 为圆心可作两个同心圆，一个经过 A 和 C，另一个经过 B 和 D。若直线 p 和 q 平行，如图5.1B，则直线 AC 和 BD 也平行。在直线 p 和 q 上分别取点 P 和 Q，使它们落在平行线 AC 和 BD 之间的等距平行线上。显然，圆 APC 和 BQD 没有公共点。

两个不同的点偶，AC 和 BD，称作是彼此隔离的，如果它们落在同一个圆(或同一条直线)上，并且它们在圆(或直线)上的次序使得无论哪一段弧 AC (或线段 AC)包含且只包含 B 和 C 这两点中的一个点。这种关系通常记作

$$AC/\ /BD,$$

自然，还可记成另外 7 种等价的形式，例如：$AC/\ /DB$，$BD/\ /AC$ 等等。

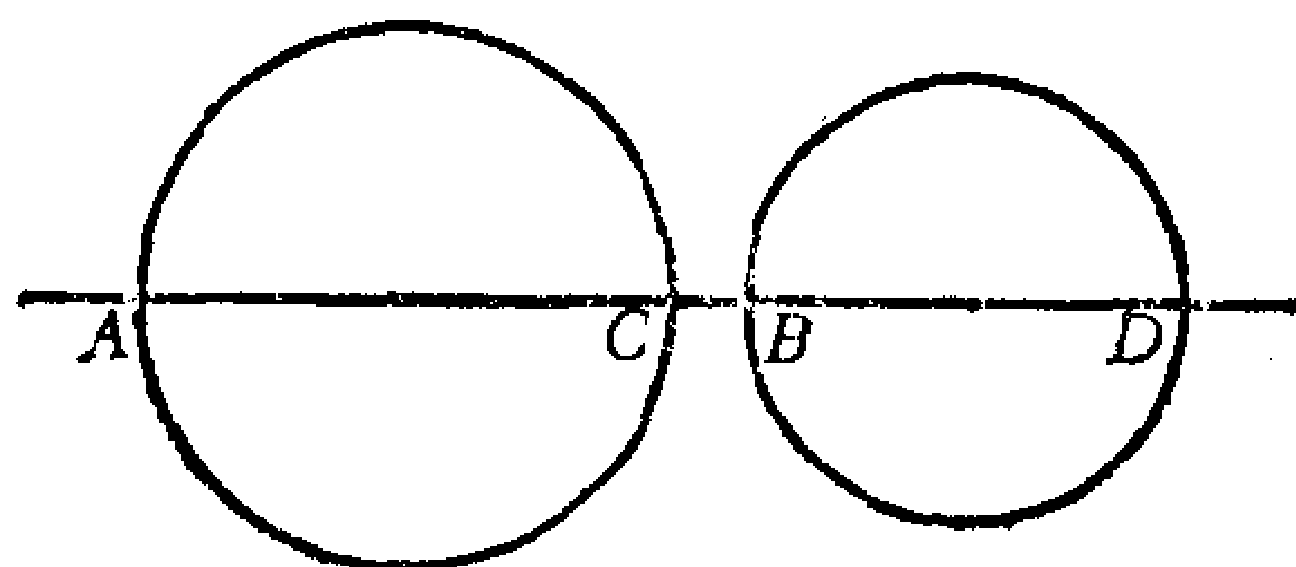


图 5.1C

如果两个点偶AC和BD在一条直线上，或在一个圆上，但是它们不是彼此隔离的，则容易画出两个互不相交的圆，其中一个经过A和C，另一个经过B和D。当这四点共线时(图5.1C)，只要作以线段AC和BD为直径的圆就行了。当这四点共圆时，如果$AB//CD$，并且$BC<AD$(图5.1D)，则取直线BC与线段AC的垂直平分线的交点及直线BC与线段BD的垂直平分线的交点为圆心就行了。当$ACBD$成矩形时，情况变得更简单，但处理的方式需稍作变动。

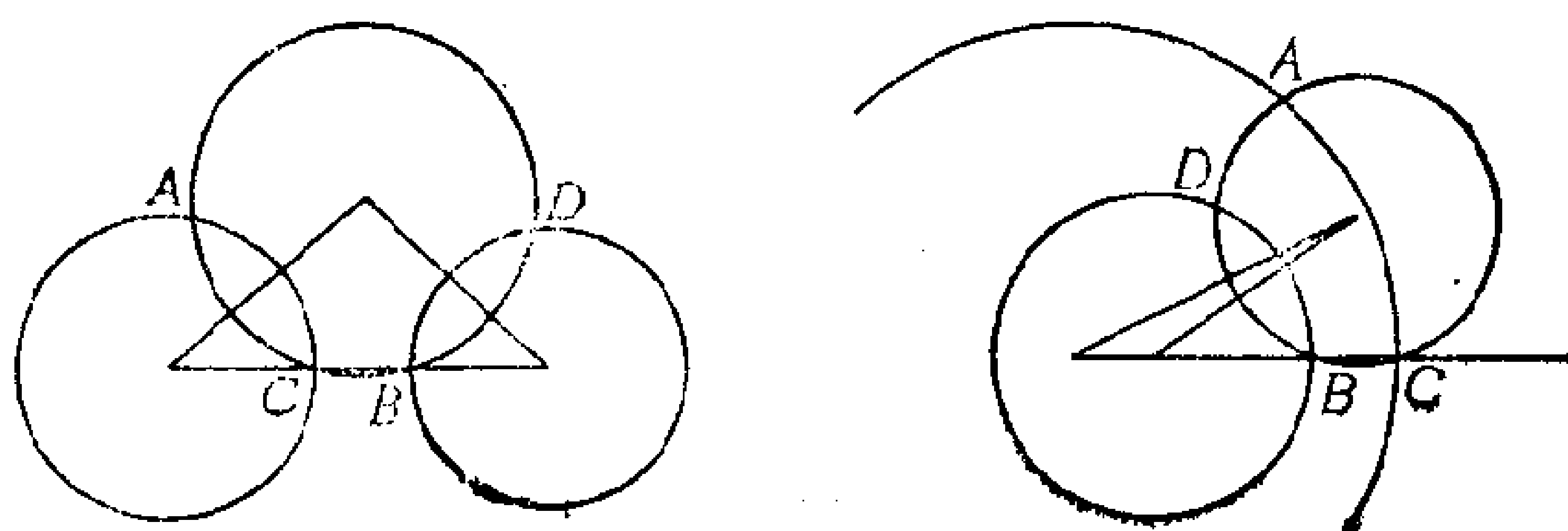


图 5.1D

反过来，如果$AC//BD$，则经过A和C，但不经过B点的圆必定把B和D"隔离"开，即在这两点中必有一点在圆内，另一点在圆外。因此，经过A, C的圆一定和经过B, D的每一个圆都相交。

定理5.1.1 的逆否命题说：如果经过两个已知点的每一个圆与经过另外两个已知点的每一个圆都至少有两个公共点，则这四个点必定是共线的（图5.1E）或共圆的(图5.1F)。我们已经看到，这时两个点偶是彼此隔离的。因此，我们可以重新以对称的方式定义"隔离性"，而不必预先假定这四点的共线性或共圆性：

设AC和BD是两个不同的点偶，如果经过A, C的每一个

圆与经过B, D的每一个圆都相交(或重合)，则称AC和BD是彼此隔离的。

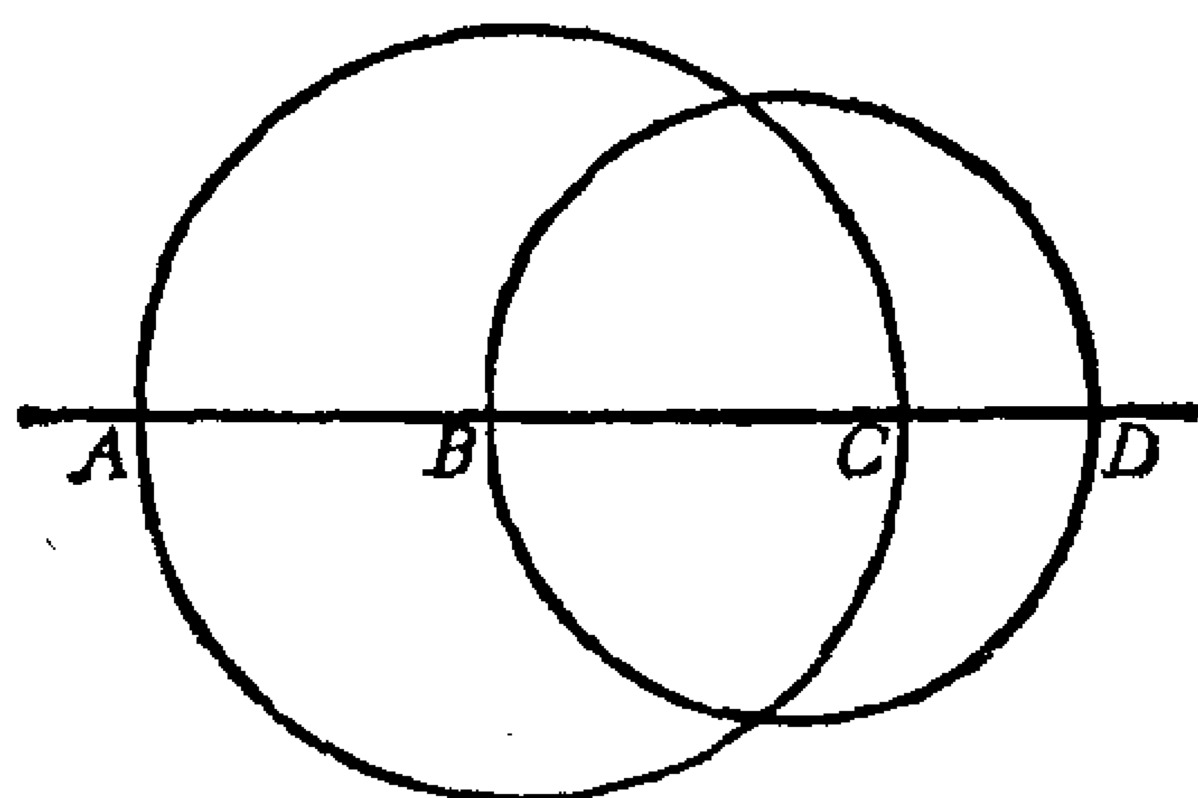


图 5.1E

实际上还有不涉及圆的第三种刻画隔离性的方法：

定理5.1.2 四个不同点A, B, C, D的相互距离满足不等式

$$AB \times CD + BC \times AD \geqslant AC \times BD,$$

并且等号成立的充分必要条件是$AC//BD$。

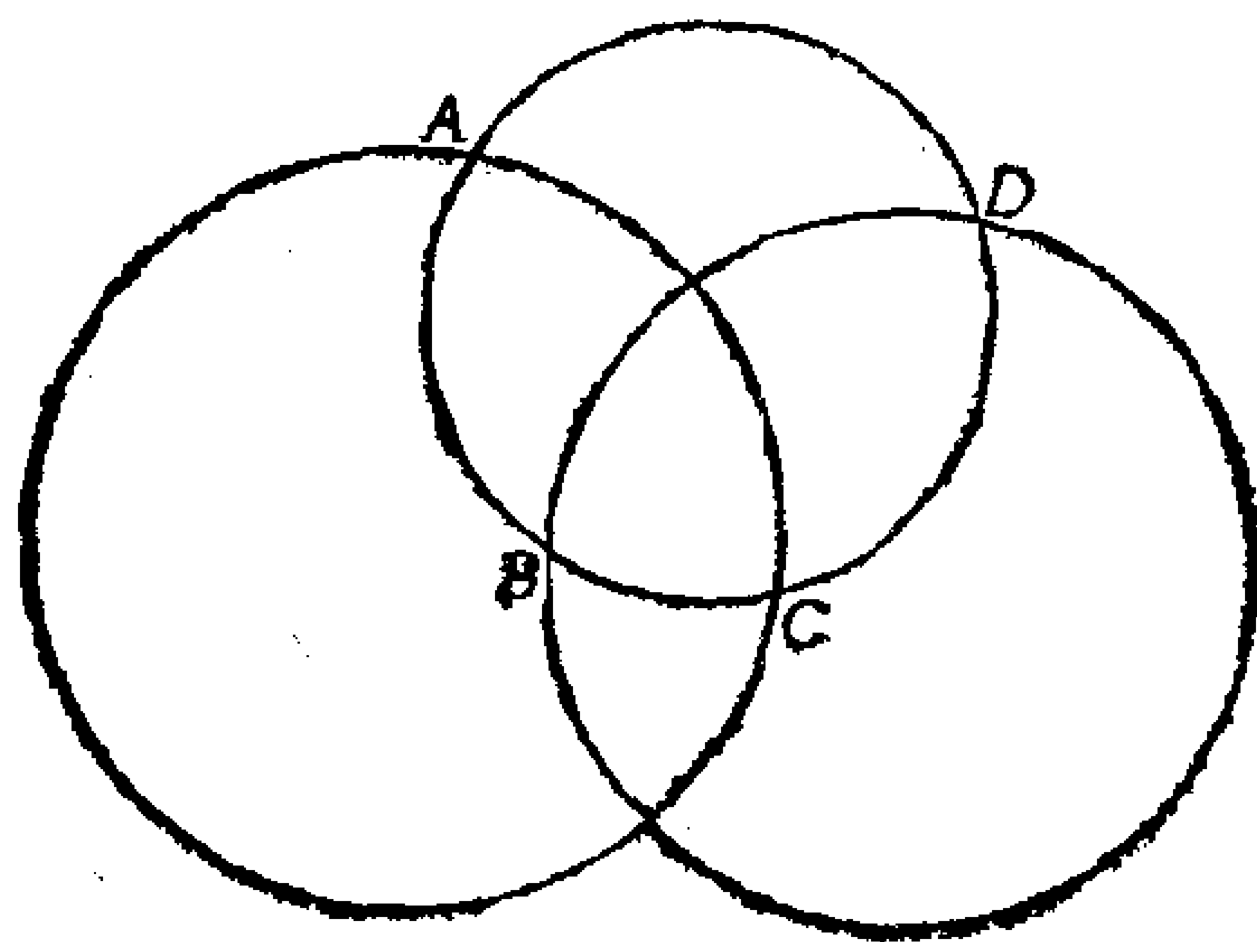


图 5.1F

证明该定理必须十分谨慎，然而却是非常有趣的。首先考虑四个点落在同一条直线上的情形，因而可用有向线段的记法(符号的规定如§2.1所述)。记

$$AD=x,\qquad BD=y,\qquad CD=z,$$

则 $$AB=x-y,\qquad BC=y-z,\qquad AC=x-z。$$

于是我们有

$$\begin{aligned}AB\times CD+BC\times AD&=(x-y)z+(y-z)x\\&=(x-z)y=AC\times BD。\qquad(5.1.2.1)\end{aligned}$$

如果$AC//BD$(图5.1E)，则线段AC只包含B和D中的一个点，故比值AB/BC和AD/DC的符号相反，乘积$AB\times DC$和$BC\times AD$的符号相反，乘积$AB\times CD$和$BC\times AD$的符号相同，所以当AB,CD等都看作正长度时，(5.1.2.1)式仍然成立。另一方面，如果A,C不与B,D隔离(图5.1C)，则$AB\times CD$和$BC\times AD$的符号相反，(5.1.2.1)式意味着正数$AC\times BD$等于正数$AB\times CD$与正数$BC\times AD$之差。因为两个正数之和必大于它们之差，故

$$AB\times CD+BC\times AD>AC\times BD。$$

于是在四点共线的情形证明了定理5.1.2。

若四点不全在一条直线上，则其中必有三点构成一个三角形，不妨假定这个三角形是ABC(必要时可以重新命名)，另一点是D(它可能落在三角形的一边上)。于是，定理5.1.2成为托勒密定理(即定理2.6.1)及其逆定理(即定理2.6.2)的推论，也就是四点A,B,C,D(前三点构成一个三角形)的相互距离满足不等式

$$AB\times CD+BC\times AD\geqslant AC\times BD,$$

并且等号成立的充分必要条件是：$ABCD$是以AC和BD为对角线的圆内接四边形。

习　题

写出与$AC//BD$等价的8种记法。

§5.2 交比

任意四个不同点A,B,C,D决定了一个数$\{AB,CD\}$，称为这依次四个点的交比；用这四点之间的相互距离表示，交比定义为

$$\{AB,CD\}=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}.$$

在定理5.1.2的不等式两边除以$AC\times BD$，则得

定理5.2.1 四个不同点A,B,C,D的交比满足

$$\{AD,BC\}+\{AB,DC\}=1$$

的充分必要条件是$AC//BD$。

隔离性用交比来判别的准则，使我们能把逻辑次序倒过来：不用圆来定义隔离性，而是用隔离性来定义圆！任意三个不同点A,B,C唯一地决定了一个圆(或一条直线)ABC，它是由满足下列条件之一的点X的全体组成的集合：

$$BC//AX,\quad 或CA//BX,\quad 或AB//CX.$$

习　题

1. $\{AB,CD\}=\{BA,DC\}=\{CD,AB\}=\{DC,BA\}$.

2. 求$\{AD,BC\}+\{AB,DC\}$的值，其中

(i) B和D以相同的比分别内分和外分线段AC，即$AB/BC=AD/CD$。

(ii) D是等边三角形ABC的中心。

(iii) $ABDC$是正方形。

(iv) $ABCD$是正方形。

§5.3 反演

下面的"拟变换"是斯泰纳在1830年发明的。如图5.3A所示，给定一个以O为圆心，以k为半径的圆ω，设P是不同于O的任意一点，则P的反演点定义为射线OP上的一点P'，它到O点的距离满足方程

$$OP \times OP' = k^2.$$

由定义可知，P是P'的反演点。因此，反演是周期为2的映射(我们所熟悉的中心对称和反射的周期也是2)。并且在反演圆ω外部的每一点的反演点都在圆ω的内部，反演把圆ω的外部变成它的内部。圆ω上的点是仅有的自反演点。

如果点P描出一条轨迹(例如，一条曲线)，则点P'描出它的反演轨迹。特别是，以O为圆心，以r为半径的圆反演成半径为k^2/r的同心圆。

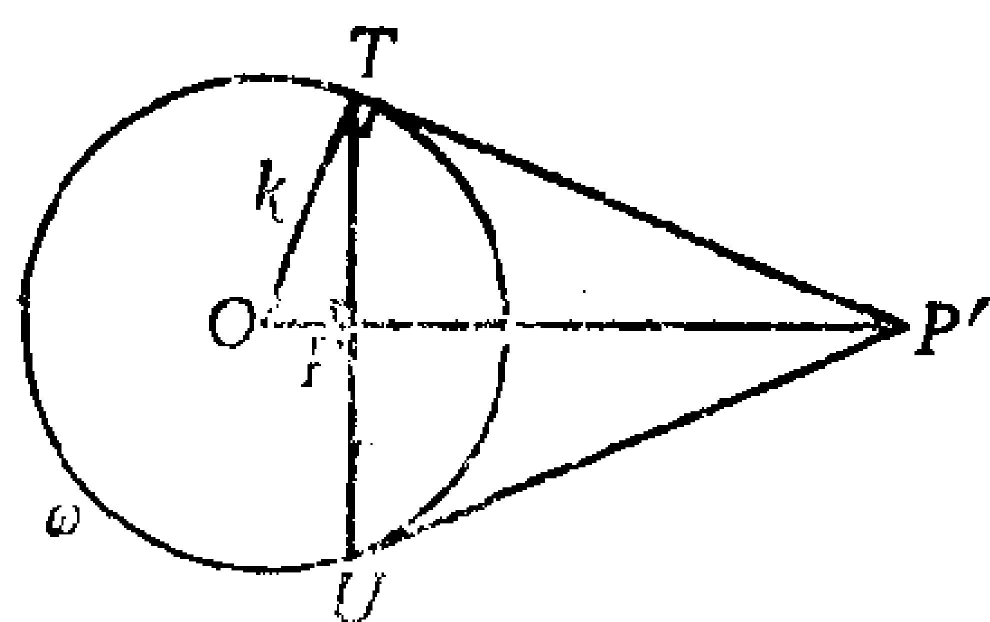


图 5.3A

如果我们把O点本身去掉，则经过O点的任意一条直线是它自己的反演像。(决不要把O点看作它自己的反演像，从而迴避上面的附加条件；因为，如果把O点看作它自己的反演点，则反演就不再是连续变换了，这时只要P靠近O点，P'就会离得很远。)

设P是圆ω内部的一点(P不在O点上)。考虑经过P点，垂直于OP的弦TU，设P'是圆ω在T, U两点的切线的交点。因为$\triangle OPT \sim \triangle OTP'$，故点$P'$满足条件

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'}, \quad OP \times OP' = k^2,$$

所以P'是P的反演点。

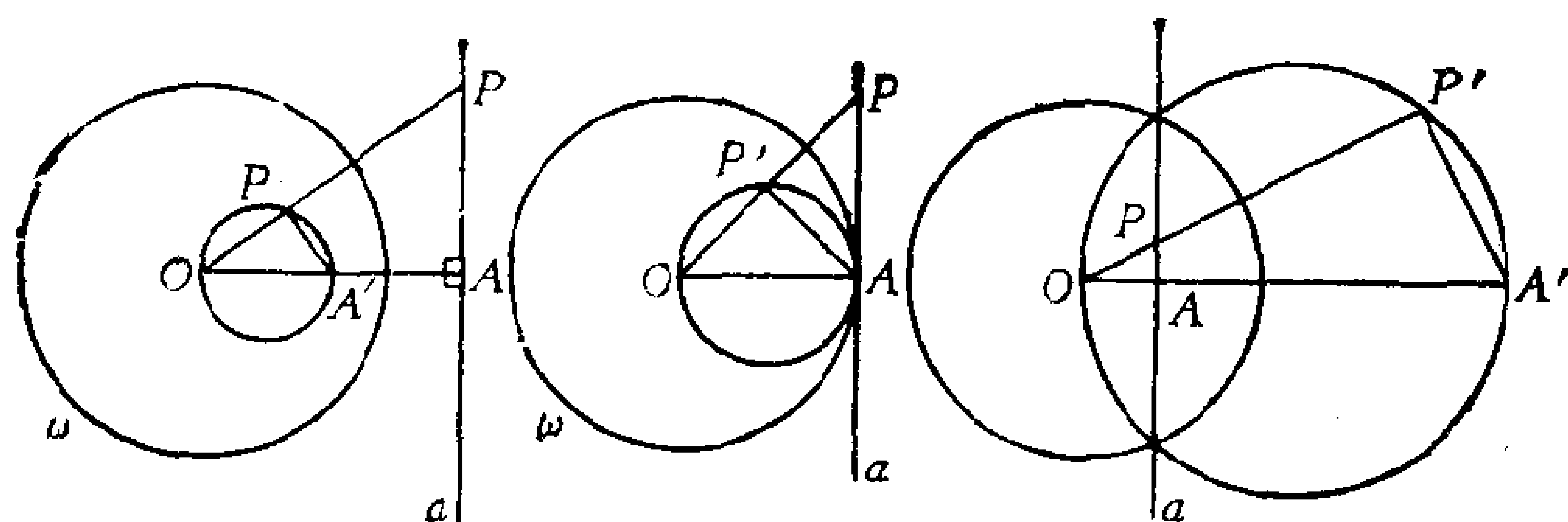


图 5.3B

反过来，要作圆ω外任意一点P'的反演点，只要画一个以OP'为直径的圆。若该圆与ω相交于T和U，则P'的反演点P就是TU的中点(即TU和OP'的交点)。

图5.3B表明，不经过O点的任意一条直线a的反演像是经过O点的一个圆(去掉O点自己)，而且这个圆的通过O点的直径与a垂直。证明如下：设A是从O点向a引垂线的垂足，A'是A的反演点，P是a上任意一点，P'是射线OP与以OA'为直径的圆的交点。因为$\triangle OAP\sim\triangle OP'A'$，于是

$$\frac{OP}{OA}=\frac{OA'}{OP'},$$

故$OP\times OP'=OA\times OA'=k^2$。

反之，在OA'为直径的圆上的任意一点P'(除去O点)反演成直线a上的一点P。因此经过O点的圆(除去O点自己)反演成一条与该圆经过O点的直径垂直的直线，即反演成一条平行于该圆在O点的切线的直线。

由此得到，以O和P为公共点的两个相交的圆反演成经过反演点P'的两条相交直线；在O点相切的两个圆反演成

一对平行直线。

实际上有一种仪器可用来画任意的已知轨迹的反演像，它比圆规复杂不了多少，利普金(L. Lipkin)在1781年发明了一种这样的联动装置；大约过了九十年，波塞利(A. Peaucellier)重新发明了这种装置，称为波塞利反演器①。它是由六个杆组成的，其中两条长度为a的杆把固定点O与边长为$b(<a)$的菱形$PQP'R$的两个相对的顶点Q,R分别联结起来，菱形在四个顶点处都是用铰链联结的(看图5.3C)。在P'处插一支铅笔，在P处插一支描图笔(或者两者反过来)，则当描图笔尖在已知轨迹上移动时，铅笔尖就画出了反演轨迹。理由是：若设X是菱形的中心，则

$$\begin{aligned}OP\times OP' &= (OX-PX)(OX+PX)=OX^2-PX^2\\ &=OX^2+RX^2-RX^2-PX^2\\ &=OR^2-PR^2=a^2-b^2,\end{aligned}$$

这是一个常数。自然，装置的构造本身决定了轨迹必须在以O为中心，以$a\pm b$为半径的同心圆所夹的环形区域内。

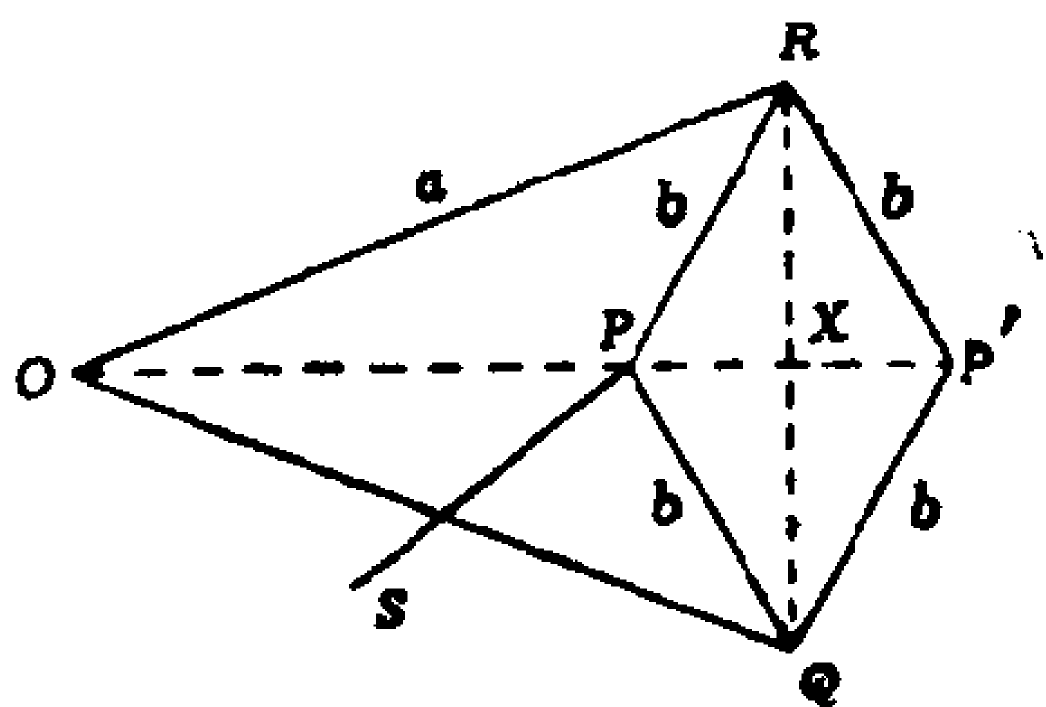


图 5.3C

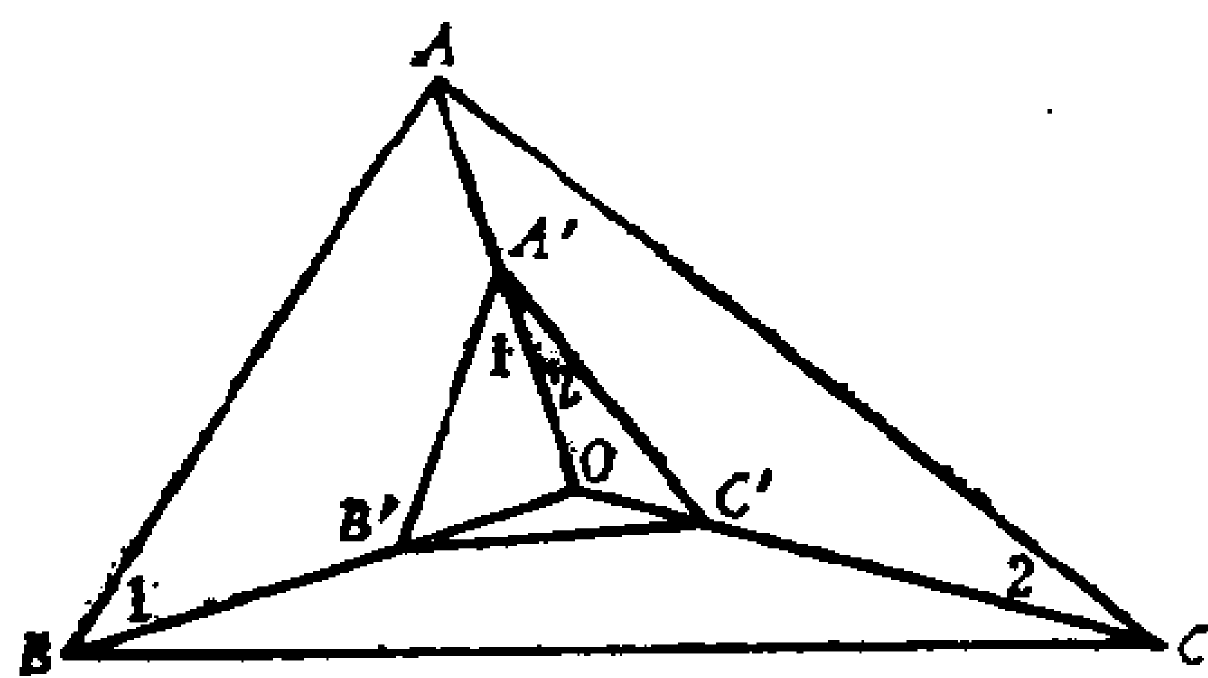


图 5.3D

① 关于其它联动装置的构造和理论，可看A. B. Kempe的《如何画直线》(How to Draw a Straight Line)一文(刊在 Hobson 等著的《化圆为方》(Squaring a Circle)一书，pp. 1—51)。要更深入地研究可看 I. I. Artobolevskii 的《产生平面曲线的机械装置》(Mechanisms of the Generation of Plane Curves, Pergamon Press, 1964)，或E. H. Lockwood [20]。

特别是，如果用第 7 根杆 SP 把 P 点和一个固定点 S 联结起来，并使 S 到 O 的距离等于该杆的长度，则 P 点被限制在经过 O 点的一个圆上运动，因此 P' 点描出一条直线(更确切地说，它描出了一条线段)。这样，波塞利反演器解决了不用直尺画直线的这个古老的问题(其意义在于：直尺本身是否是直的，在理论上依赖于事先画出的一条直线)。

三角形的反演像一般是经过 O 点的三条圆弧构成的古怪的图形。但是我们现在把注意力放在三角形的顶点 A,B,C 上。如图5.3D，假定它们的反演点是 A',B',C'，则在点 O，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 之间存在着某些有趣的关系。为简单起见，假定点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部。因为

$$OA \times OA' = k^2 = OB \times OB',$$

故 $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$，且标记为 1 的角相等。同理，标记为 2 的角也相等。因此 $\angle BOC$ 等于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的分别在 A 和 A' 处的角之和。这是因为

$$\angle BOC = \angle 1 + \angle A'B'O + \angle 2 + \angle A'C'O,$$

$$\angle A'B'O = \angle BAO, \quad \angle A'C'O = \angle CAO,$$

故

$$\begin{aligned}\angle BOC &= \angle 1 + \angle 2 + \angle BAO + \angle CAO \\ &= \angle B'A'C' + \angle BAC.\end{aligned}$$

同样，我们有

$$\angle COA = \angle B + \angle B'.$$

由此可见，在 $\triangle ABC$ 给定之后，可以调整 O 点的位置，使得 $\triangle A'B'C'$ 有任意选定的角 A' 和 B'。在 O 点决定之后，再让 k 的值变动，使 $\triangle A'B'C'$ 的大小随着变化(看习题6)。当 O 点不在 $\triangle ABC$ 的内部时，上面的讨论要作适当的修改。即使 A,B,C 共线，上面的结论也是对的。因此有

定理5.3.1 任意给定三个不同点 A,B,C，则可选取适当的反演圆，使上述三点的反演点构成的三角形 $A'B'C'$ 与一个任意给定的三角形全等。

习　题

1. 求作反演圆的内接正方形的反演像。

2. 当 O 在什么位置时，可使已知三角形的三条边反演在三个全等的圆上？

3. 给定以 O 为圆心的圆 ω，设 P 是不同于 O 的任意一点。用圆规（不许用直尺）作出 P 的反演点①：

(i) 若 $OP>\frac{k}{2}$；

(ii) 若 $\frac{k}{2n}<OP\leqslant\frac{k}{2(n-1)}$ [4, p.144]。

4. 若 O 是 $\triangle ABC$ 的(i) 外心；(ii)垂心；(iii) 内心，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 之间有什么关系？

5. 求点 (x,y) 关于圆 $x^2+y^2=k^2$ 的反演点的坐标。

6. 给定三角形 ABC 和 DEF，求反演圆圆心 O 和半径 k，使 A,B,C 的反演点 A',B',C' 构成的三角形与 $\triangle DEF$ 全等。叙述作图的方法。

§5.4 反演平面

我们已经看到经过 O 点的任意一个圆（去掉 O 点自己）反演成一条直线，而任意一个以 O 为圆心的圆反演成一个圆。

---

① 利用反演可证明，所有用直尺和圆规完成的作图只要用圆规就能完成，看[4, pp.140—152]和 H.P.Hudson 的《直尺和圆规》(Ruler and Compasses) 一文（刊在前面的附注所提到的《化圆为方》(Squaring a Circle)一书，pp.131—143)。

自然地要问：其它位置的圆的反演像是什么？作为解决这个问题的第一步，我们先研究反演对于两点之间的距离产生的影响。

定理5.4.1 若以O为圆心，以k为半径的圆把点偶AB反演成点偶$A'B'$，则它们之间的距离有关系式

$$A'B' = \frac{k^2 AB}{OA \times OB}.$$

这是因为$\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$(图5.4A)，故

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \times OA'}{OA \times OB} = \frac{k^2}{OA \times OB}.$$

由此得到，交比在反演下是保持不变的[1]：

定理5.4.2 若A, B, C, D的反演点是A', B', C', D'，则

$$\{A'B', C'D'\} = \{AB, CD\}.$$

事实上，

$$\{A'B', C'D'\} = \frac{A'C' \times B'D'}{A'D' \times B'C'}$$

$$= \frac{\dfrac{k^2 AC}{OA \times OC} \cdot \dfrac{k^2 BD}{OB \times OD}}{\dfrac{k^2 AD}{OA \times OD} \cdot \dfrac{k^2 BC}{OB \times OC}}$$

$$= \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = \{AB, CD\}.$$

从上面的定理可知，隔离性在反演下是保持不变的：

[1] J.Casey,《欧几里得几何原本前六卷续篇》第六版(A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid(6th ed.), Hodges Figgis, Dublin, 1892), p.100.

定理5.4.3 若A,B,C,D反演成A',B',C',D'，并且$AC//BD$，则$A'C'//B'D'$。

根据定理5.2.1和定理5.4.2，关系$AC//BD$蕴含着

$$\{A'D',B'C'\}+\{A'B',D'C'\}$$
$$=\{AD,BC\}+\{AB,DC\}=1,$$

因此$A'C'//B'D'$。

在§5.2的最后一段，我们已经看到，任意一个圆可以借助于它上面的三个点A,B,C，描述成由A,B,C自己以及满足关系$BC//AX$或$CA//BX$或$AB//CX$的点X组成的集合。

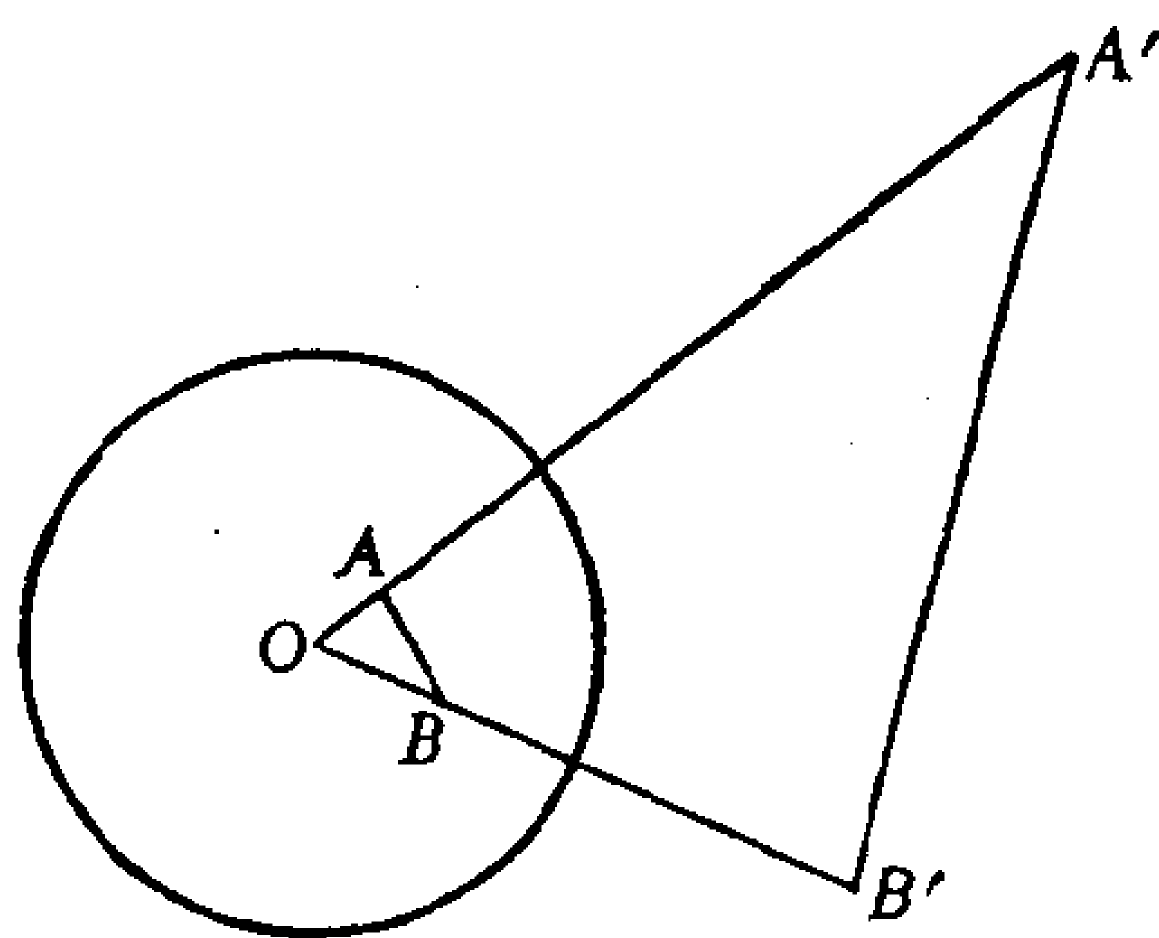


图 5.4A

因此已知圆的反演像必定是由A',B',C'以及满足关系$B'C'//A'X'$或$C'A'//B'X'$或$A'B'//C'X'$的点X'组成的集合，故圆的反演像是圆(或直线)$A'B'C'$。在§5.3已经知道，反演像是一条直线的充分必要条件是已知圆经过O点。这就证明了

定理5.4.4 任意的不经过O点的圆的反演像是一个不经过O点的圆。

利用隔离性来描述圆(或直线)的方法暗示我们，把有些术语稍作修改可能是方便的，这就是把直线看作半径是无限大的圆，从而名词“圆”就包括“直线”作为它的一种特例。同时我们约定，在欧氏平面上添加了单独的一个“无穷远点”P_∞，作为任意一个反演圆的圆心的反演像。这样得

到的平面叫做反演平面。因为以O为圆心的圆，把任意一个经过O点的圆反演成一条直线，所以我们把直线看作经过点P_∞的圆。因为两个在O点相切的圆反演成平行的直线，故平行直线可看作在点P_∞相切的圆。在这样的约定下，对反演平面而言定理5.4.4和§5.3的结果可以合在一起：

定理5.4.5 任意一个圆的反演像是一个圆。

把P_∞添加到欧氏平面之后，我们可以说反演是整个反演平面到它自身的一一对应：每一个点(毫无例外地)有一个反演像，而且每一点又都是某个点的反演像。

根据两个圆有两个公共点、一个公共点或沒有公共点，分别称它们是相交的、相切的或不相交的。因此，一对圆在反演下变成属于同一种类型的一对圆(在"一对相切圆"中，包括了"一个圆和它的一条切线"、"两条平行直线"等情形)。

习 题

1. 设A是圆ω外的任意一点，A'是它的反演点，P是ω上的动点，则比PA/PA'是常数。反之，若B, C把已知线段AA'内分和外分为已知比(设比值不等于1，见§5.2习题2(i))，则以BC为直径的圆是到A和A'的距离之比为已知比的点的轨迹(这条轨迹叫做阿波罗纽斯(Apollonius)圆)。

2. 设圆ω上的任意一点和一条直径的两端用直线相联，并设这两条直线和另一条垂直的直径相交于P和P'，则P'是P的反演点。

3. 经过圆的内部任意两点，恰能画两个圆与已知圆相切。

4. 以三个不同点为圆心，画三个彼此相切的圆，设两

两的切点是三个不同点(这三个点可以是共线的，不一定构成三角形)，则恰能画两个圆与这三个圆都相切，并且这两个圆是不相交的（斯泰纳早在1826年就叙述过这种圆①，但是人们还是把它们称为索蒂(Soddy)圆[6, pp.13-16]）。

5. 用反演给出定理5.1.2的简捷的证明[23, pp.10-11]。

6. 经过O点的圆α关于圆心在O的反演圆ω的反演像是圆ω和α的根轴(参考§2.2的最后一段)。

7. 若把直线看作圆的特殊情形，则经过一点的两条直线是一对相切圆还是一对相交圆？试用这两条直线的公共点的数目作出解释。

§5.5 正交性

根据反演把圆变到圆的性质立即得到反演是保持夹角不变的。两个相交圆之间的夹角(有两个，它们互为补角)自然地定义为在它们的一个交点处的两条切线所成的角。在关于连心线的反射下，明显地可知，两个圆在它们的两个交点处的角是对应相等的。要知道关于圆心为O的反演圆的反演对角的影响，假定过P点的两条直线a和b的一个夹角是θ，如图5.5A所示。在关于图5.3B的讨论中，我们已经看到直线a反演成经过O点的圆α，而且该圆在O点的切线与a平行。同理，直线b反演成经过O点的圆β，该圆在O点的切线与b平行。因为θ等于两圆在O点的切线的夹角，因此圆α和圆β的夹角等于θ。但是这两个圆的另一个交点P'恰是P的反演点，所以这两个圆在P'的夹角同样是θ。

读者不难看出，如果直线a或b碰巧经过O点，则上面

---

① 见Crelle的*Journal für Mathematik*, vol.1, p.274.

的论证只需要作适当的变动(若 a 和 b 都经过 O 点，则它们在反演下变到自己，于是θ的不变性是明显的)。

对于经过 P 点的任意两个圆，设它们在 P 点的切线分别是 a 和 b。显然，这两个圆的反演像分别与 α 和 β 在 P' 相切。因此有

定理5.5.1 如果两个圆相交成角θ，则它们的反演像相交成同一个角θ。

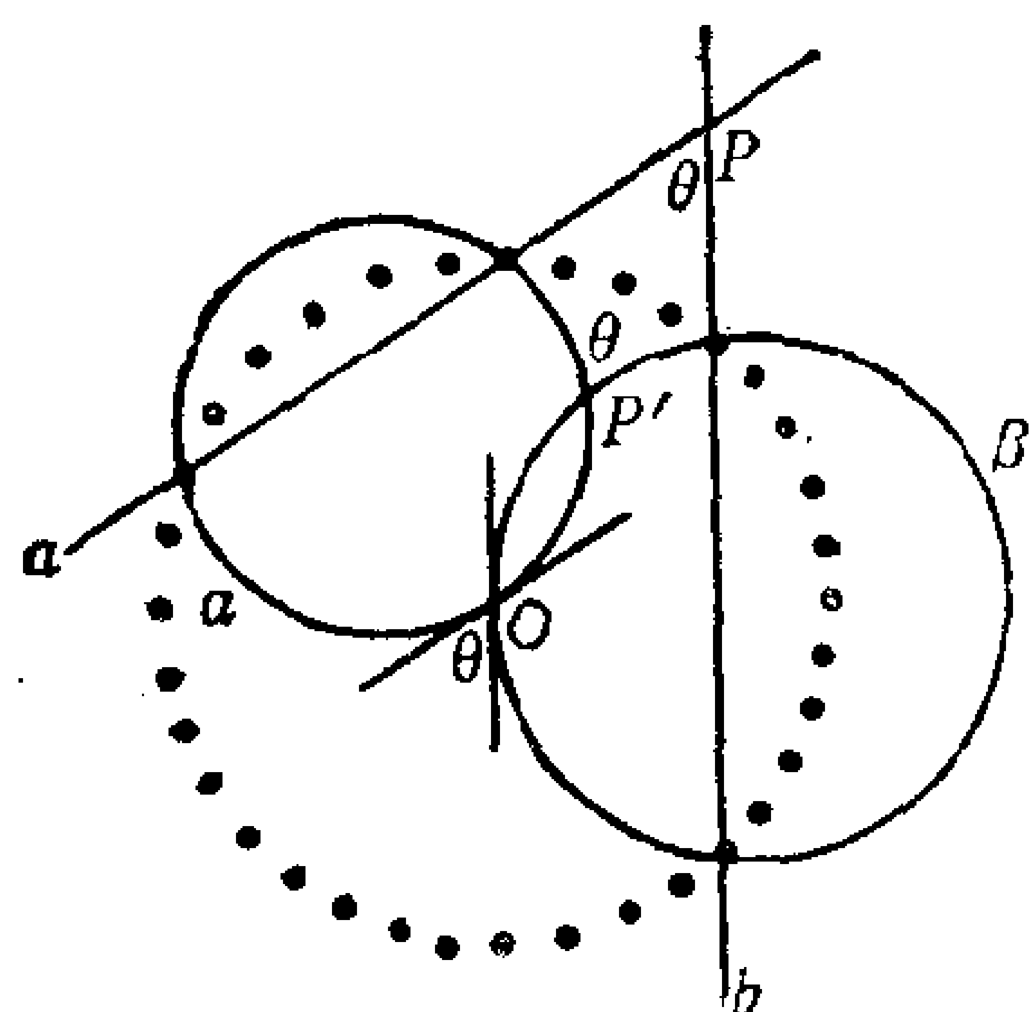


图 5.5A

如果两个圆相交成直角(有两个交点)，则称它们是彼此正交的；这时，在每一个交点处，其中一个圆的切线正好是另一个圆的直径。作为定理5.5.1的特例，我们有

定理5.5.2 彼此正交的圆反演成彼此正交的圆。

如果把图2.1B上的点 P 改记成 O，则可以把图中的圆看作经过互为反演的点 A 和A' 的圆。因为

$$k^2 = OA \times OA' = OB \times OB' = OT^2,$$

故经过 O 点的任意一条割线 BB' 给出了一对互为反演的点 B 和 B'；从 O 点引出的切线的切点都是自反演点(即在反演圆ω上的点)。因此得到

定理5.5.3 设两个不同点 P 和 P' 关于圆 ω 是互为反演的，则通过 P 和P' 的任意一个圆是它自己关于ω 的反演像，并且它和ω是正交的。

反过来，每一个与 ω 正交的圆必是它自己关于 ω 的反演像。因为，若设该圆与 ω 的一个交点是 T，而 A 是该圆上的

任意一点，设直线OA和圆的另一个交点是A'，则

$$OA\times OA'=OT^2=k^2.$$

此外，如果与ω正交的两个圆彼此相交，则它们的交点关于ω是互为反演的。实际上，若设一个交点是A，则直线OA与其中每一个圆都在A的反演像处相交。

上面的讨论允许我们用正交性来重新定义反演。事实上，我们有反演的"逆"定义：

圆ω上的任意一点是自反演的；其余的点P的反演像是经过P点，且与ω正交的任意两个圆的第二个交点。

若用直线代替圆ω，则关于直线的反射可以看作关于圆的反演的特殊情形。

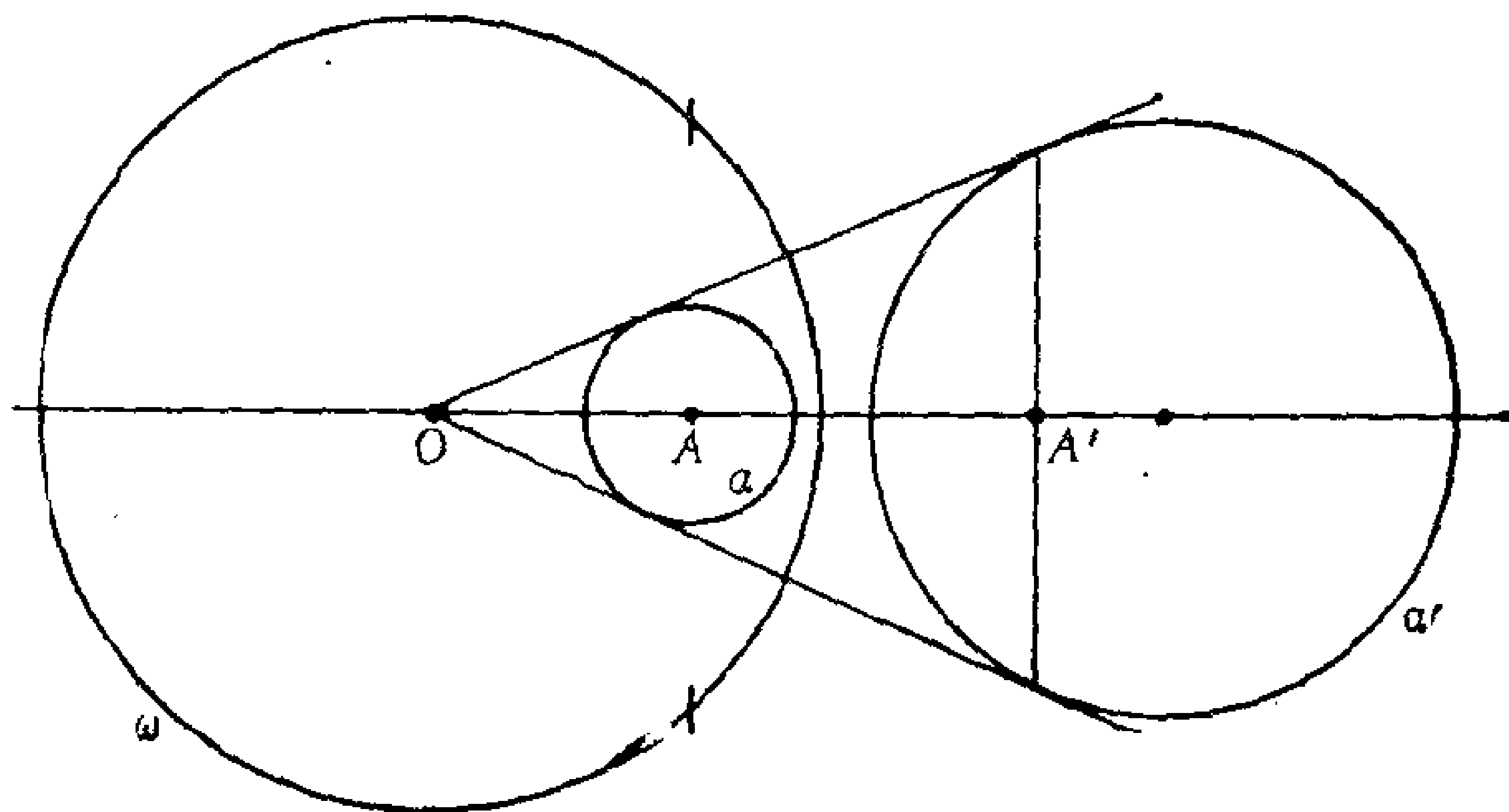


图 5.5B

从反演的"逆"定义得到，圆α及关于α互为反演的两个点，在关于ω的反演下，变成圆α'及关于α'互为反演的两个点。现在我们可以把反演和欧几里得几何的观念结合起来，考察α的圆心A在反演下受到的影响。乍想起来，可能会认为A会反演成圆α'的圆心；但是这种想法实在是太幼稚了！（即使在α与ω重合的情形都不会是这样。）事实上，α

及关于a互为反演的点A和P_∞，关于ω反演成α'及关于α'互为反演的点A'和O。因此，A点关于ω的反演点A'不是α'的圆心，而是O点关于α'的反演点(看图5.5B)。

习　　题

1. 已知圆ω及圆外一点A，求作以A为圆心，且与ω正交的圆。

2. 已知圆ω及互不为反演的两个点P和Q，求作通过P,Q，且与ω正交的圆。

3. 已知一点P及不经过P点的两个圆ω_1和ω_2，求作一个圆，使它经过P点，且与ω_1和ω_2都正交。

4. 若关于ω(圆心是O，半径为k)的反演把圆α变成圆α'，则在O点关于α的幂与O点关于α'的幂之间有什么关系？

5. 设P是圆α上的一点，O是不在圆α上的一点，则存在唯一的一个圆经过O点，且与α相切于P点(图5.5C)。

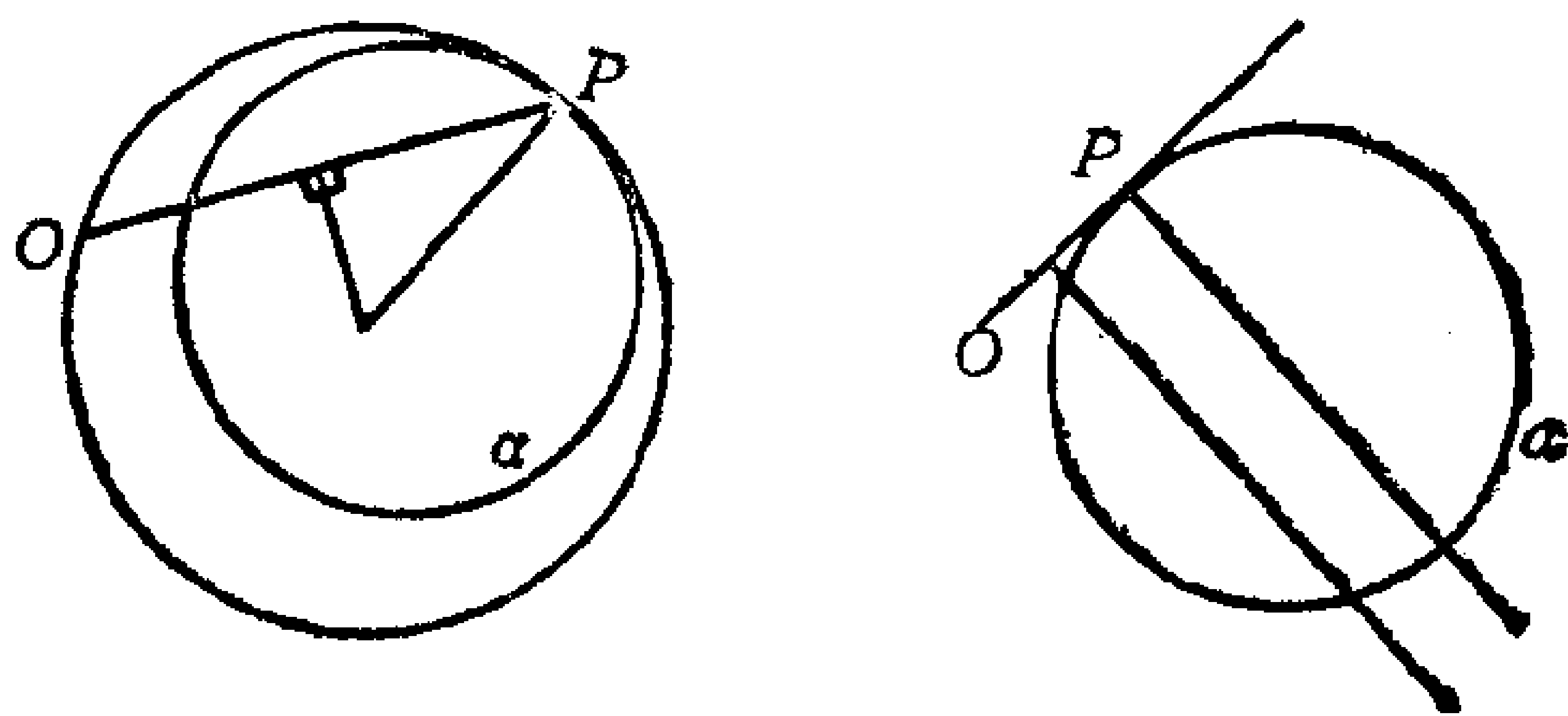


图　5.5C

§5.6　费尔巴哈定理

在§1.8我们简略地介绍过费尔巴哈定理.至少有三种方式可以有效地把反演用于这个定理。其中一种用法可看皮德

(Pedoe)的[23,pp.9-10].在给出另一种用法[24, pp. 76-77]之前，我们再叙述一遍费尔巴哈定理：

定理5.6.1 三角形的九点圆和它的内切圆及三个傍切圆都相切。

在图5.6A上画出了三角形 ABC 和它的中位三角形 $A'B'C'$，三角形的内切圆(以 I 为圆心)及它与 BC 的切点 X，第一个傍切圆(以 I_a为圆心)及它与 BC 的切点 X_a。这两个圆(与 $\triangle ABC$ 的三条边都相切)还有一条公切线，记作 B_1C_1。此外，以 XX_a为直径的圆记作 ω，B_1C_1和$BC, A'B'$，$A'C'$ 的交点分别记作 S, B'', C''。因为圆 ω 和内切圆正交，也和第一个傍切圆正交，所以这两个圆在关于 ω 的反演下是不变的。我们要证明圆 ω 把九点圆反演成直线 B_1C_1。

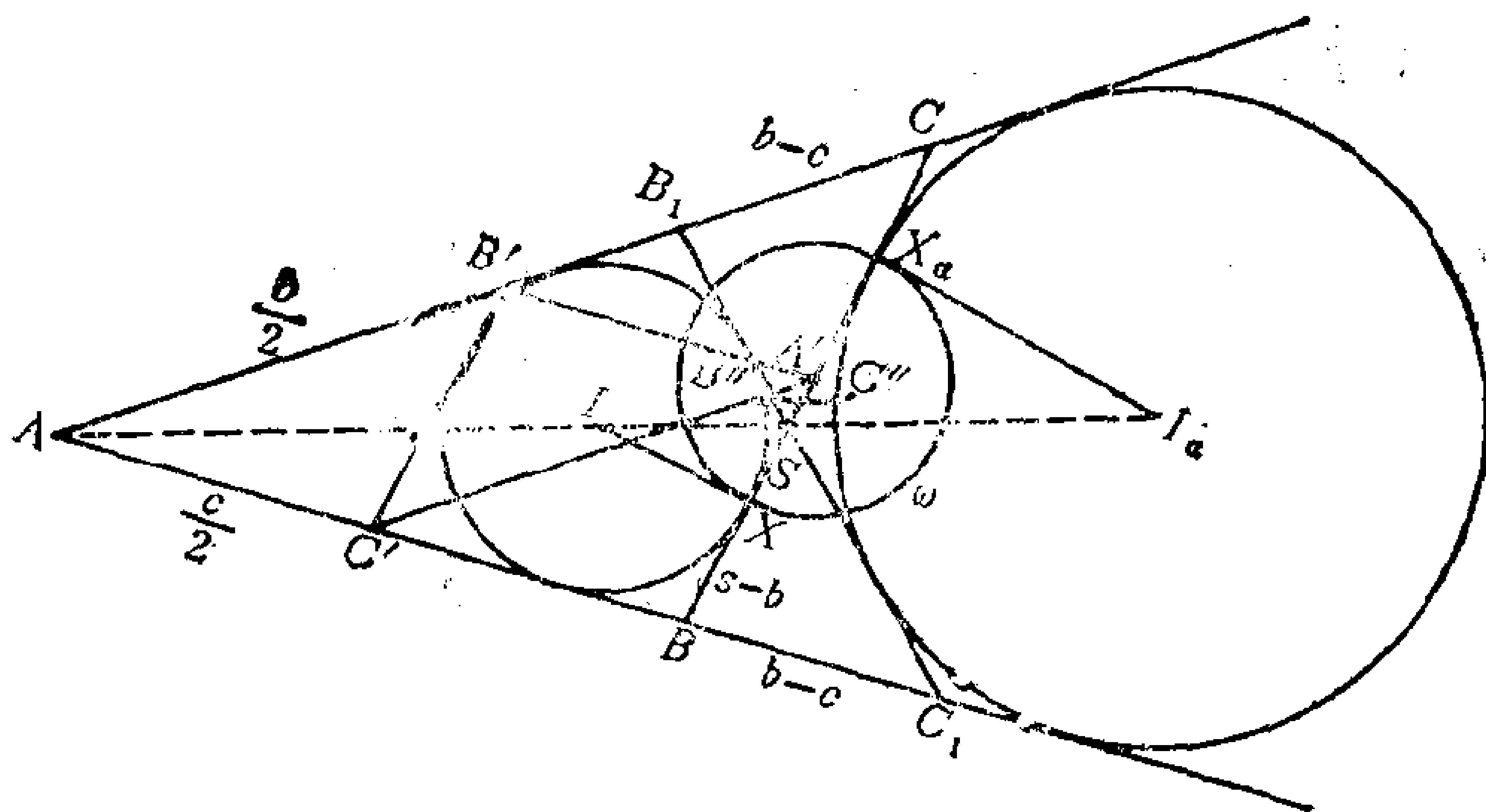


图 5.6A

根据定理1.4.1及接着的说明，若记 $s=(a+b+c)/2$，则有

$$BX = X_aC = s - b,$$

因此 ω 的圆心是 BC的中点 A'，ω 的直径是

$$XX_a = a - 2(s-b) = b - c$$

(可以假定这是正数，不然的话，只要改换一下 A, B, C 的命名次序）.于是，九点圆经过 ω 的圆心 A'，所以 ω 把它反演成一条直线。我们要证明这条直线经过 B''和 C''(因而也经过 B_1和 C_1)。为此，只要证明 B'', C''是九点圆上的点 B', C' 关于 ω 的反演点就行了.

因为点 S (和 I, I_a一样)落在角 A 的平分线上，定理1.3.3说 S 把线段 CB 分割成比 $b:c$，所以

$$CS = \frac{ab}{b+c}, \qquad SB = \frac{ac}{b+c},$$

SA' 是这两条线段长度之差的一半，即

$$SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

此外，$BC_1 = AC_1 - AB = AC - AB = b - c$；同理，

$$CB_1 = b - c.$$

因为$\triangle SA'B'' \sim \triangle SBC_1$，$\triangle SA'C'' \sim \triangle SCB_1$，我们有

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c},$$

$$\frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b},$$

所以

$$A'B' \times A'B'' = \frac{c}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

$$A'C' \times A'C'' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

因为$(b-c)/2$恰好是圆 ω 的半径，于是 ω 把 B' 反演成 B''，

把C'反演成C''，这就是要证的结论。

事实上，ω把内切圆和第一个傍切圆反演成它们自己，而把它们的公切线B_1C_1反演成九点圆，因此九点圆也和这两个圆相切。

附带提一下，九点圆是由点D，E，F决定的，而这三点可看作垂心四角形（看§2.4的最后一段）的各组对边的交点。换句话说，四个三角形ABC，BCH，CAH，ABH的九点圆是同一个圆。但是这每一个三角形都有它自己的四个三重相切圆。这样，垂心四角形决定了十六个圆，而这些圆与圆DEF都是相切的。

习　题

1. 在图5.6A中，直线B_1C_1和BC的夹角是$B-C$。
2. 圆ω把点S反演成D（从A向边BC所引的高线足）。

§5.7　共轴圆

在§2.3已经知道，任意两个非同心圆α和β决定了共轴圆束$\alpha\beta$，使得α和β的根轴是圆束中任意两个圆的根轴。轴上的任意一点P关于圆束中所有的圆有相同的幂。如果该幂是正数，则它的平方根是P点到圆束中任意一个圆的切线的长度。这些切线正好是以P为圆心，且与圆束中每个成员都正交的圆的半径。与圆束$\alpha\beta$中每个成员都正交的任意两个圆γ和δ属于另一个相补的圆束$\gamma\delta$，其中每个成员与圆束$\alpha\beta$中的每个成员都正交。每一个圆束都把它的根轴所在的直线（正好也是另一个圆束的圆心的轨迹）作为它的一个成员。自然，这两条直线是互相正交的。如果我们把这两条直线取作坐标轴（如§2.3所做的那样），则这些圆的方程可写

成

$$x^2+y^2-2ax+c=0, \qquad x^2+y^2-2by-c=0,$$

其中 c 是固定的，而 a，b 是参变量。若 $c>0$，则第一个圆束是由不相交的圆组成的，如图2.3A；而第二个圆束是由相交圆组成的，它们都经过极限点$(\pm\sqrt{c},0)$，这两个点可看作是第一个圆束的退化的成员：

$$(x-\sqrt{c})^2+y^2=0, \qquad (x+\sqrt{c})^2+y^2=0.$$

若 $c<0$，则绕原点旋转90°就成为上面这种情形了，因此第一个圆束是由相交的圆组成的，而第二个圆束是由不相交的圆组成的。若 $c=0$，则得到两个彼此正交的相切圆束，每一个圆束的成员都与一条轴在原点处相切。

不相交的共轴圆束的成员，根据它们与极限点连线的交点的排列，有一个自然的顺序。因此，我们能够说，在任意三个成员中的某一个在另外两个成员之间。

倒过来，我们可以把圆束 $\alpha\beta$ 说成是由所有与 γ 和 δ 都正交的圆组成的，而圆束 $\gamma\delta$ 是由所有与 α 和 β 都正交的圆组成的。换句话说，$\alpha\beta$ 是与两个不同的圆都正交的圆组成的，而这两个圆同时与 α 和 β 是正交的。

若 O 和 P 是相交的圆 γ 和 δ 的两个公共点，则关于圆心在 O 点的任意一个圆的反演，把这两个圆变成经过 P 的反演点 P' 的两条直线。与这两条直线都正交的圆组成以 P' 为圆心的同心圆"束"，而圆束 $\gamma\delta$ 反演成这些同心圆的直径。这样的图形也可以从两个不相交的圆 α 和 β 得到，因为我们能够容易地求得两个相交的、且与 α 和 β 都正交的圆 γ 和 δ（图5.7A），也就是圆心在 α 和 β 的根轴上、半径适当长的两个圆。因此有

定理5.7.1 任意两个不相交的圆能反演成两个同心圆。

为此，把不相交共轴圆束 $\alpha\beta$ 的极限点 O 和 P 中的一个作为反演圆的圆心。根据从 O 到 P 的自然顺序，若 α 比 β 大，则以 O（或 P）为圆心的圆把 α 反演成两个同心圆中较大的（或较小的）圆。若保持圆心不变，而让反演圆半径变动，则这一对同心圆就换成另外一对半径成同一个比的同心圆；原因是新的反演等价于原来的反演与一个适当的中心相似变换之和。如果把反演圆心 O 换成 P，则这一对同心圆就换成另一对半径成反比的同心圆。

如果 α 和 ω 是任意两个不同的圆，则 α 关于 ω 的反演像属于圆束 $\alpha\omega$。这是因为与 α 和 ω 都正交的圆，在关于 ω 的反演下变成它自己。如果 α 在关于 ω 的反演下变成 β，则称

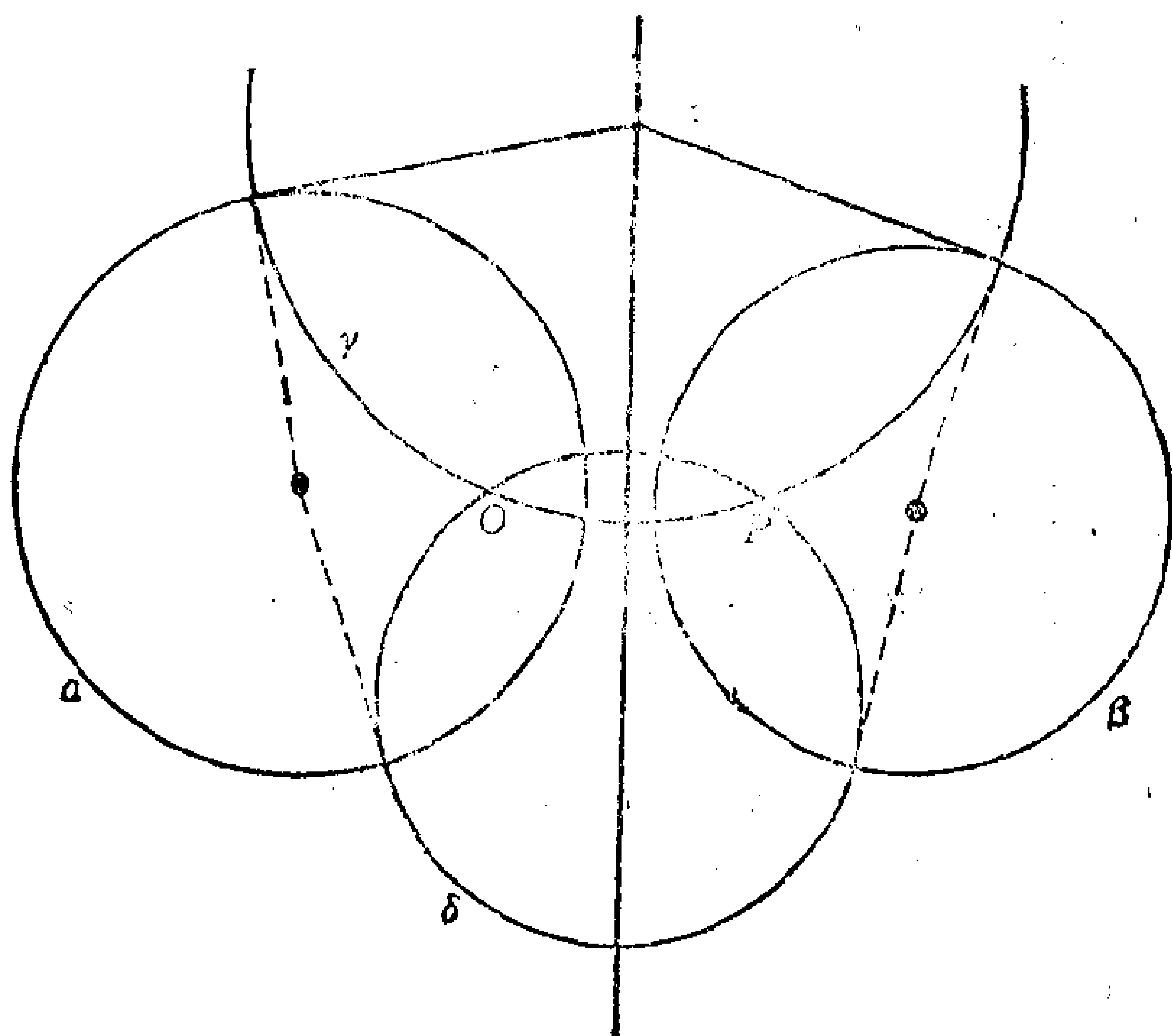


图 5.7A

ω是α和β的中间圆(更自然的名称似乎应该是"反相似圆")。因为β属于圆束$\alpha\omega$，所以ω属于圆束$\alpha\beta$。现在我们可以证明定理5.4.5的逆定理。

定理5.7.2 任意两个圆至少有一个中间圆；两个不相交的圆，或两个相切的圆恰有一个中间圆，而两个相交的圆有两个彼此正交的中间圆。

若α和β相交，我们能把它们反演成两条相交的直线。这两条直线关于它们的角平分线是互为反射像的。再反演回去，则可见相交圆α和β有两个彼此正交的中间圆，它们平分α和β之间的夹角。

若α和β相切，我们能把它们反演成平行直线，因此这两个圆有唯一的中间圆。

若α和β不相交，则能把它们反演成同心圆。设这两个同心圆的半径分别是a和b，则它们关于半径为$\sqrt{ab}$的同心圆是互为反演的。再反演回去，可见不相交的圆α和β有唯一的中间圆(和相切的情形一样)。若圆α和β是全等的，则它们的中间圆就是这两个圆的根轴。

习　题

1.若两个圆

$$x^2+y^2-2ax+c=0,\qquad x^2+y^3-2by+c'=0$$

是彼此正交的，则c和c'应满足什么条件？

2.两个相切圆(假定它们在公切线的同一侧)的中间圆的半径是这两个圆的半径的调和平均值。

3.两个互相正交的相切圆束，在以它们的公共点为反演圆心的反演下成为什么样的图形？

4.任意两个圆能够反演成两个全等的圆。

5. 任意两个全等的圆的根轴是它们的中间圆.

6. 任意四个不同点 A, B, C, D 能够反演成一个平行四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点(包括四个顶点在一条直线上的退化的情形，这时 $A'B' = D'C'$，$A'D' = B'C'$)。

提示：分三种情形：(i) $AC//BD$；(ii) $AB//CD$ 或 $AD//BC$；(iii) A, B, C, D 不共圆来考虑。

7. 已知两个不相交的圆(假定它们的半径不相等)，求作它们的中间圆。

提示：根据§5.5习题3可求共轴圆束 $\alpha\beta$ 的极限点，其中 α 和 β 是两个不相交的非同心圆。

§5.8 反演距离

因为在反演下角平分线变成角平分线，故两个相交圆的每一个中间圆必平分它们的夹角。因此可以问：两个不相交的圆是否具有在某种意义下被它们的中间圆平分的性质？这个问题要求我们构造出两个不相交圆 α 和 β 的反演距离 (α, β)，使得当 γ 属于圆束 $\alpha\beta$，并且 β 位于 α 和 γ 之间时，有

$$(\alpha,\beta)+(\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma). \tag{5.8.1}$$

如果以一个极限点为反演圆心，则这三个圆反演成三个同心圆，半径分别为 a, b, c，它们满足关系式 $a>b>c$，或 $a<b<c$。自然，

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}.$$

取对数的运算把乘法变成加法，故可命

$$(\alpha,\beta)=\left|\log\frac{a}{b}\right|. \tag{5.8.2}$$

当 $a>b$ 时，上式右边是 $\log(a/b)$；而当 $a<b$ 时，上式右边

是 $\log(b/a)$。显然，方程(5.8.1)对这三个圆是成立的。

记号"log"可以理解为底数是10的对数，即关系式 $x=\log y$ 意味着 $y=10^x$。但是，以10为底数的习惯来自人有十个手指(包括姆指在内)，而不是基于数学上的考虑。在数学上更有意义的是用超越数

$$e=\sum_0^{\infty}\frac{1}{n!}=2.7182818284590\cdots$$

代替10作为底数。这时关系式 $x=\log y$(有时记作 $\ln y$)意味着

$$y=e^x=\sum_0^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

而自然对数① 本身是由相当重要的级数给出的：

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots.$$

现在，我们把任意两个不相交的圆的反演距离定义为在反演下这两个圆变成同心圆时，它们的半径之比(较大者为分子，较小者为分母)的自然对数。

因为同心圆在反演下成为共轴圆，因此在共轴圆束的成员之间，这种"距离"在(5.8.1)式的意义下是可加的。特别是，任意两个不相交的圆的中间圆平分它们之间的反演距离。若把两条平行直线看作两个同心圆的极限情形，则可以认为两个相切圆的反演距离是零。

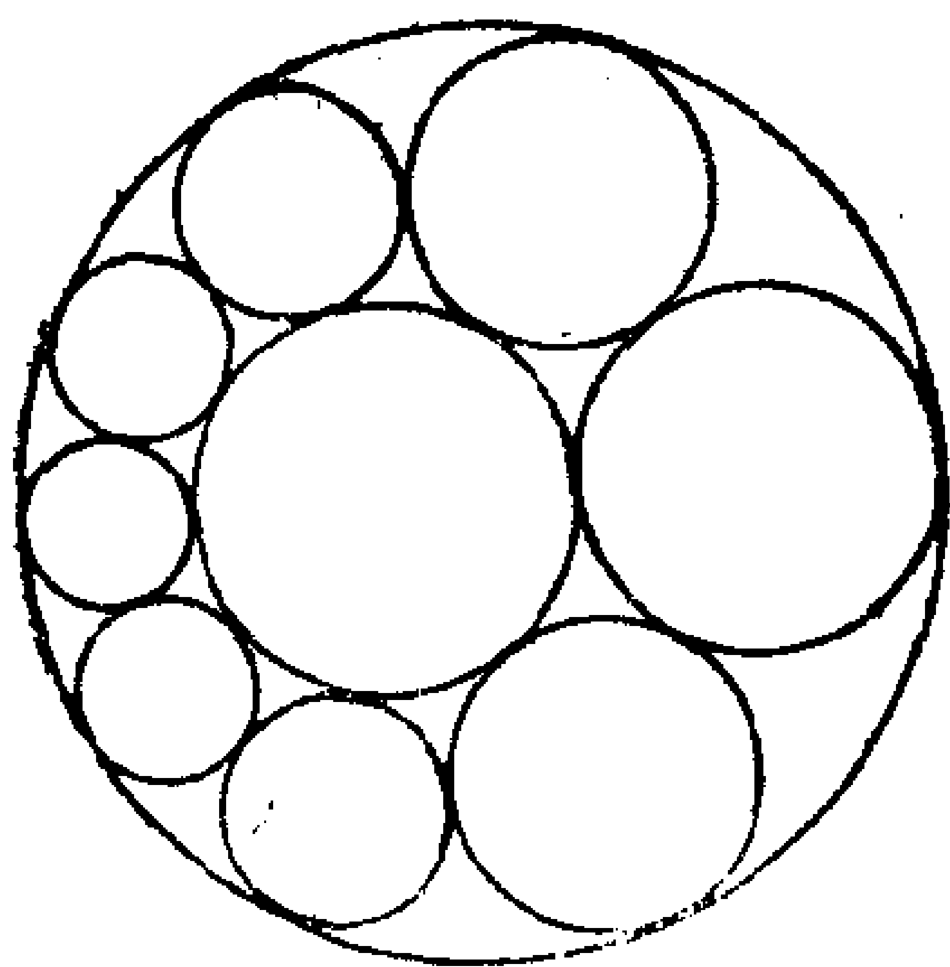


图 5.8A

如果有两个非同心圆，其中一个落在另一个的内部，如图5.8A；再画一串依

① 看[26,p.32]。

次外切的圆，并且要求它们和原先的两个圆都相切，则有可能出现这个相切圆序列恰好是闭合的情形，即它们是由 n 个圆组成的，而最后一个圆又与第一个圆相切。在这种情形下，我们可以取任意一个与原先两个圆都相切的圆作为序列中的第一个圆，而得到的仍是由 n 个圆组成的相切圆闭序列。定理5.7.1提供了这个结果的非常简单的证明(这个结果称作斯泰纳的系[13, p.53])。我们只要把原先的两个圆反演成两个同心圆，而其它的圆就变成环状排列的若干全等的圆，它们的圆心构成一个正 n-角形，如图5.8B。在这个图中，A 是环状排列的圆的圆心之一，T 是相应的圆与属于该序列的相邻圆的切点，O 是同心圆的公共圆心，外圆半径是 a，内圆半径是 b。显然$\triangle OAT$ 是直角三角形，并且

$$OA=\frac{a+b}{2},\qquad AT=\frac{a-b}{2},$$

$\angle AOT$ 等于 π/n 个弧度[8, p.3]。因为这两个同心圆的半径是 a 和 b，它们的反演距离是 $\delta=\log(a/b)$。显然

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{AT}{OT}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}+1}=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

因此，只要原先两个圆的反演距离 δ 满足方程

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1},$$

则斯泰纳的系就成立。解出 e^{δ}，再求出 δ，则我们有

$$e^{\delta}=\frac{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}=\left(\frac{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)^{2}=\left(\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right)^{2},$$

$$\delta = 2\log\left(\sec\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n}\right). \qquad (5.8.3)$$

特别地，设 $n=4$，则反演距离为$2\log(\sqrt{2}+1)$的任意两个圆属于六个圆组成的“构图”，其中每一个圆都和四个圆相切。这六个圆可以分为三组相对的圆，每一个圆和不与它相对的圆都相切，而任意两个相对圆之间的反演距离都是$2\log(\sqrt{2}+1)$。自然，其余12个反演距离都是零。

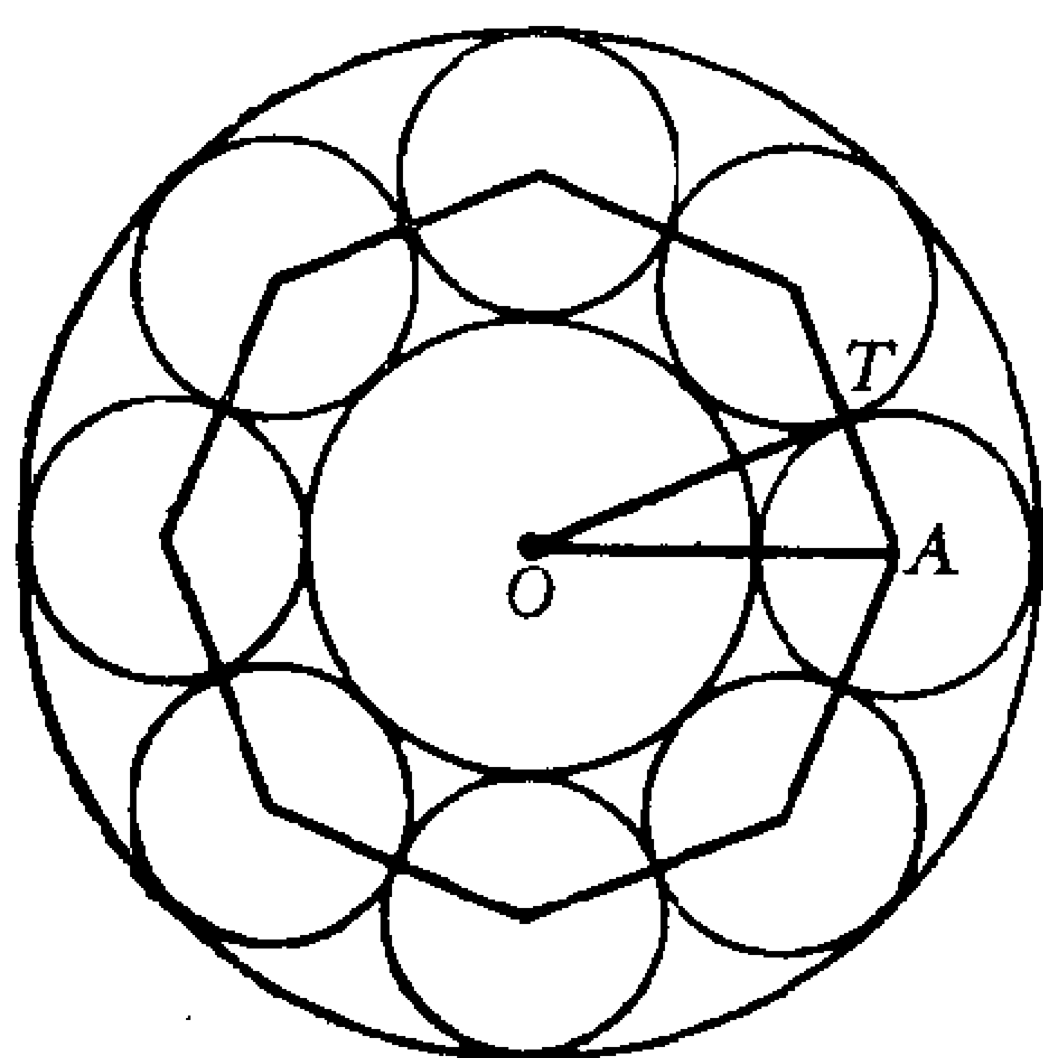


图 5.8B

如果相切圆序列在绕行 d 圈之后是闭合的($d>1$)，则斯泰纳的系仍旧成立，在公式中只要用分数 n/d 代替 n 就行了。

因为圆的半径可以是任意的，而它的圆心由两个坐标所决定，因此欧氏平面(因而也是反演平面)上所有圆的集合依赖三个参数，也就是说该集合是∞^3圆族。如果把反演平面上的∞^3圆族解释为三维空间中的平面族，则我们就得到由高斯(Gauss)，鲍耶(Bolyai)，罗巴契夫斯基(Lobachevsky)（在1820—1830年间)各自独立地发现的、著名的“非欧几何学”。两个相交圆之间的夹角代表相交成一条直线的两个平面之间的夹角；两个相切的圆代表两个“平行”的平面；两个不相交圆之间的反演距离代表有公垂线的“超平行”平面之间沿公垂线量取的距离[①]。

① 看Coxeter，《非欧几何学》(Non-Euclidean Geometry(5th ed., Toronto, 1965))，pp.265—266。

习　题

1. 在斯泰纳的系中，闭合相切圆序列中的任意两个相邻圆的切点落在原先两个圆的中间圆上。（事实上，任意两个圆 α 和 β 的中间圆可以说成是与 α 和 β 都相切的两个相切圆的切点 P 的轨迹。）

2. 方程(5.8.3)等价于

$$\delta = 2\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)。$$

3. 先画三个彼此相切的全等的圆，再画三个彼此相切的全等的圆，并且使其中每一个圆同时与第一组圆的两个成员相切。那末这六个圆之间的反演距离是多少？

§5.9　双曲函数

在这一节我们将看到，在两个相交圆的夹角的三角函数和两个不相交圆的反演距离的所谓双曲函数① 之间存在着惊人的相似之处。双曲正弦，双曲余弦和双曲正切用指数函数 e^x 分别定义为

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

由此可知

$$\cosh x+\sinh x=e^x,\qquad \cosh x-\sinh x=e^{-x}.$$

下表的左边列出了其余的一些恒等式；右边是类似的三角恒

① “双曲函数”的名称的由来见[6,p.124]或[26,p.22]。高斯，鲍耶，罗巴契夫斯基的非欧几何学称为“双曲几何学”的理由在《非欧几何学》一文中作了很出色的论述，该文刊载在麻省理工学院(M.I.T.)出版的《数学科学：论文集》(The Mathematical Sciences, A Collection of Essays, 1969)一书上。

等式。

$\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1$	$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$
$\tanh 0 = 0, \quad \tanh\infty = 1$	$\tan 0 = 0, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$	$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
$\sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$	$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
$\cosh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$	$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$	$\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

用这种记号，(5.8.3)式能写成

$$\tanh\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\pi}{n}, \quad 或 \quad \sinh\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\pi}{n},$$

或

$$\cosh\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{n}.$$

把双曲函数在数学中的作用比作铵根 NH_4[①] 在化学中的作用或许不会被认为是异想天开的。这个根虽然是由氮原子和氢原子组成的，但是它的行为却象一个钠原子，或一个钾原子。同样，双曲函数虽然是用指数函数表示的，但是它的性质却类似于三角函数。(当然，如果学过一点复变函数，知道公式 $\cos x = \cosh ix, i\sin x = \sinh ix$，则上面用化学作类比

① 见A.E.H.图腾(Tutton)的《结晶学》(Crystals.Kegan Paul, London, 1911), p.82。

就毫无意义了。）

现在回到关于圆对之间的夹角和反演距离的讨论，考虑半径分别为 a 和 b 的两个圆，它们的圆心距（按通常的意义）是 c。若在 a，b，c 中每一个都小于另外两个的和，则这两个圆相交于两点，其中每一个交点和两个圆心构成边长为 a，b，c 的三角形。两圆的一个交角恰好是该三角形的前两条边的夹角，它的余弦是

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

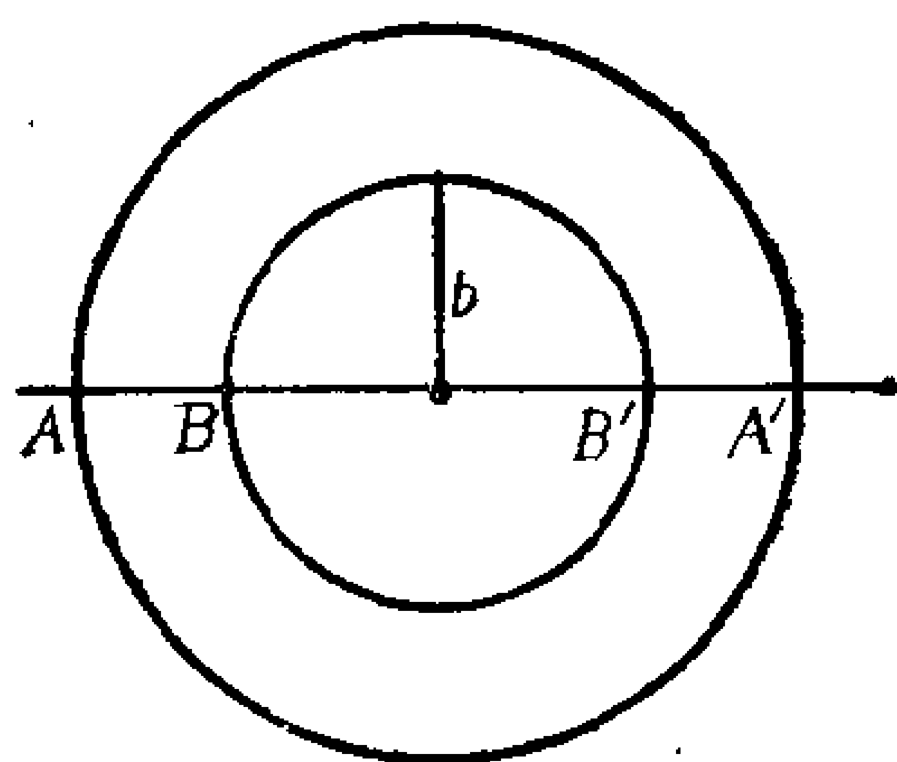


图 5.9A

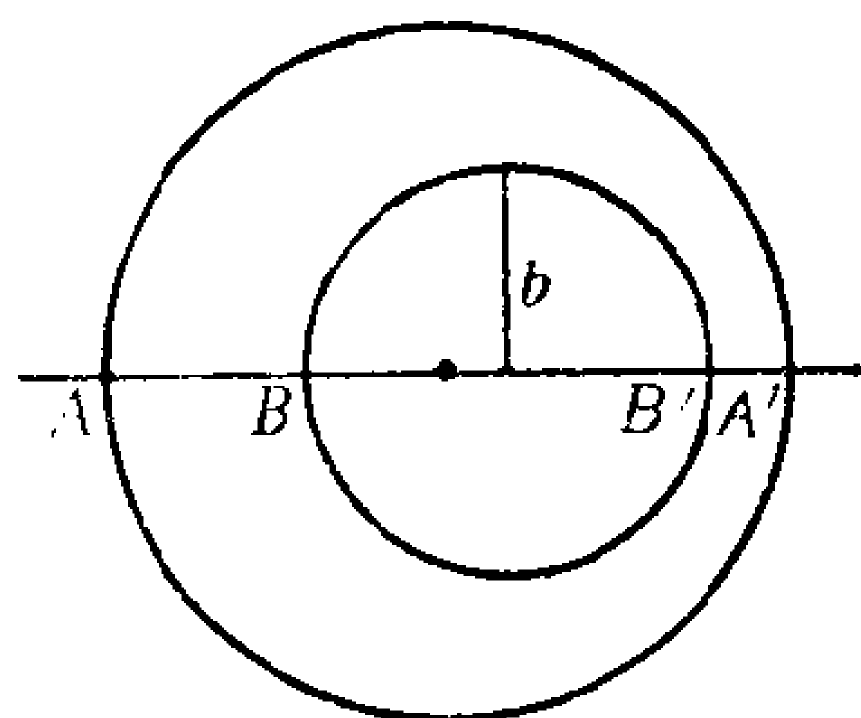


图 5.9B

当 a，b，c 中有一个大于另外两个之和时，则这两个圆不相交。我们来看表达式

$$\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

具有什么几何意义。先设它们是两个同心圆（$c=0$），如图5.9A，则它们的直径 AA' 和 BB' 在一条直线上，且满足关系 $AB'//A'B$。它们的反演距离是

$$\delta=\log\frac{a}{b},$$

故交比是

$$\{AA', BB'\}=\frac{AB\times A'B'}{AB'\times A'B}=\left(\frac{AB}{AB'}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=\left(\frac{e^\delta-1}{e^\delta+1}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2\delta}+1-2e^\delta}{e^{2\delta}+1+2e^\delta}=\frac{e^\delta+e^{-\delta}-2}{e^\delta+e^{-\delta}+2}$$

$$=\frac{\cosh\delta-1}{\cosh\delta+1}.$$

如果这两个同心圆是半径分别为 a 和 b，圆心距为 c 的两个不相交的圆经过反演得到的，用 A, A', B, B' 表示后者两个圆和连心线的交点(假定 $AB'//A'B$)。由于定理5.4.2和定理5.4.3，交比和隔离性在反演下是不变的，因此我们仍有

$$\{AA', BB'\}=\frac{\cosh\delta-1}{\cosh\delta+1}.$$

现在我们要把这个交比(也就是 δ)用新的 a, b, c 表示出来。若 $a-b>c$，如图5.9B，我们有

$$\{AA', BB'\}=\frac{AB\times A'B'}{AB'\times A'B}=\frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)}$$

$$=\frac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{a^2+b^2-c^2+2ab}$$

$$=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

因此 $\cosh\delta=\gamma$。若 $a+b<c$，如图5.9C，我们有

$$\{AA', BB'\}=\frac{AB\times A'B'}{AB'\times A'B}=\frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)}$$

$$=\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{-a^2-b^2+c^2-2ab}{-a^2-b^2+c^2+2ab}$$

$$= \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1},$$

因此 $\cosh\delta = -\gamma$。综合以上结果，我们证明了

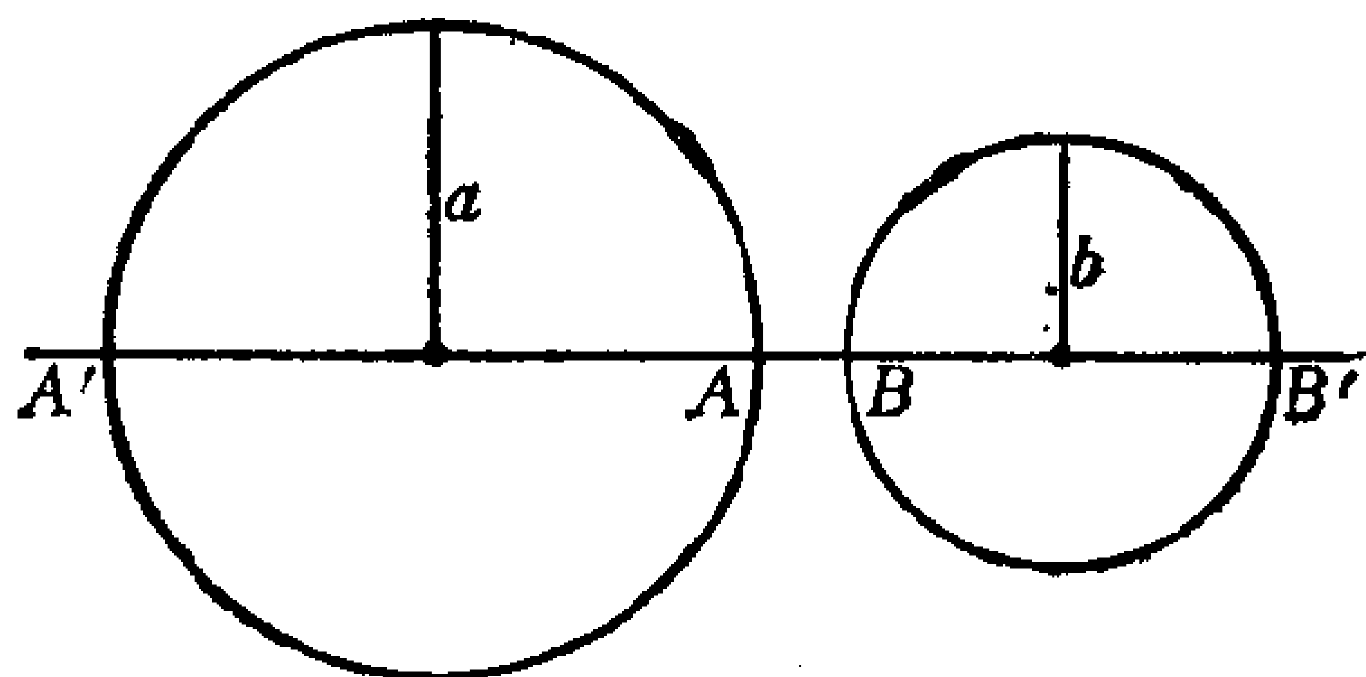


图 5.9C

定理5.9.1 若两个不相交圆的半径分别是 a 和 b，圆心距是 c，则这两个圆的反演距离 δ 适合①

$$\cosh\delta = \left|\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right|.$$

作为这个定理的一个有趣的应用，考虑半径分别为 a 和 b 的两个圆，并且假定前一个圆有一个内接四角形，它同时是后一个圆的外切四角形。如所周知，这样两个圆的圆心距 c 满足方程

$$\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{b^2},$$

即
$$|a^2 + b^2 - c^2| = b\sqrt{4a^2 + b^2},$$

故
$$\cosh\delta = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

因为 $\cosh^2\delta = 1 + \sinh^2\delta$，所以含有一个内接外切四角形的两个圆之间的反演距离可以用它们的半径简单地表示成

① 函数 $y = \cosh x$ 的图象是大家所熟悉的悬链线，即一条链条在两端挂起来时所采取的形状，见[6, pp. 317—319]。

$$\sinh\delta=\frac{b}{2a}.$$

习　题

1. 若半径都是1的两个圆的圆心距是$2(\sqrt{3}+1)$，则落在它们正中的另外一个单位圆必平分它们的反演距离．最后一个圆是否是前两个圆的中间圆？

2. 索蒂圆（§5.4习题4）之间的反演距离δ适合

$$\cosh\frac{\delta}{2}=2.$$

3. 设两个圆彼此外离，它们有四条公切线．则短的公切线与长的公切线的长度之比等于$\tanh(\delta/2)$，其中δ是这两个圆的反演距离．

4. 设一个半径为b的圆的圆心到一条直线的距离是p．若$p<b$，设直线和圆的交角是δ，则$\cos\delta=\pm p/b$．若$p\geqslant b$，设它们的反演距离是δ，则$\cosh\delta=p/b$．

5. 设三角形的外接圆半径是R，内切圆半径是r，外接圆和内切圆的反演距离是δ，则

$$\sinh\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}.$$

提示：利用定理2.1.2．

6. 考虑三角形的外接圆和九点圆．若该三角形是钝角三角形，这两个圆必相交，则它们的交角δ适合

$$\sin^2\frac{\delta}{2}=-\cos A\cos B\cos C.$$

若该三角形是直角三角形或锐角三角形，则这两个圆的反演

距离 δ 适合

$$\sinh^2\frac{\delta}{2}=\cos A\cos B\cos C.$$

7. 两个圆

$$x^2+y^2-2ax+d^2=0 \quad (a>d>0)$$

和

$$x^2+y^2-2bx+d^2=0 \quad (b>d>0)$$

的反演距离是 $|\alpha-\beta|$，其中

$$\tanh\alpha=\frac{d}{a},\qquad \tanh\beta=\frac{d}{b}.$$

第六章 射影几何学导论

既然你在学习几何学和三角学，我就问你一个问题。一条船在海洋上航行，它装载着羊毛离开了波士顿。它总共重200吨。它要开往勒阿弗尔去。在船上有12名乘客。风向是东北偏东。时钟正指着下午三点一刻。这是在五月份。请问：船长的年龄有多大？

G·弗劳贝特

至今我们所考虑的都是把点变到点的变换。“射影”平面的特有性质是对偶原理，它允许我们把点换成直线，把直线换成点。关于一个固定圆的“配极”就是这样一种变换，它与反演是很接近的。除圆心O外，每一点配极成一条直线；每一条不经过O点的直线配极成一点；每一个圆配极成以O为“焦点”的圆锥曲线。我们在对圆锥曲线进行若干讨论之后，将对反演几何学和射影几何学进行仔细的比较，从而结束这一章。

§6.1 配极

关于反演的这种变体，我们仍需要以O为圆心，以k为半径的圆ω(如§5.3所讲到的)。除O点外的每一点P决定了一条经过P的反演像，并且垂直于OP的直线p(图6.1A)，称之为点P的极线。反过来，每一条不经过O点的直线p决定了一点P，它是从O向直线p所引的垂足P'的反演像，

称为直线 p 的极点。在图5.3A 中，如果把 P 和 P' 的位置对换一下，则当 P 点在 ω 的外部时，它的极线是从 P 向 ω 作的两条切线的切点的连线。显然，当 P 落在 ω 上时，它的极线就是圆 ω 在该点的切线，这是 P 和 p 关联的仅有的情形（"关联"的意思是 P 在 p 上，或者说 p 经过 P）。我们会看到，采用协调的记号是方便的。我们把点 $A, B, C, \cdots$ 的极线记作直线 $a, b, c, \cdots$；反过来，任意一条直线的极点记成对应的大写字母。

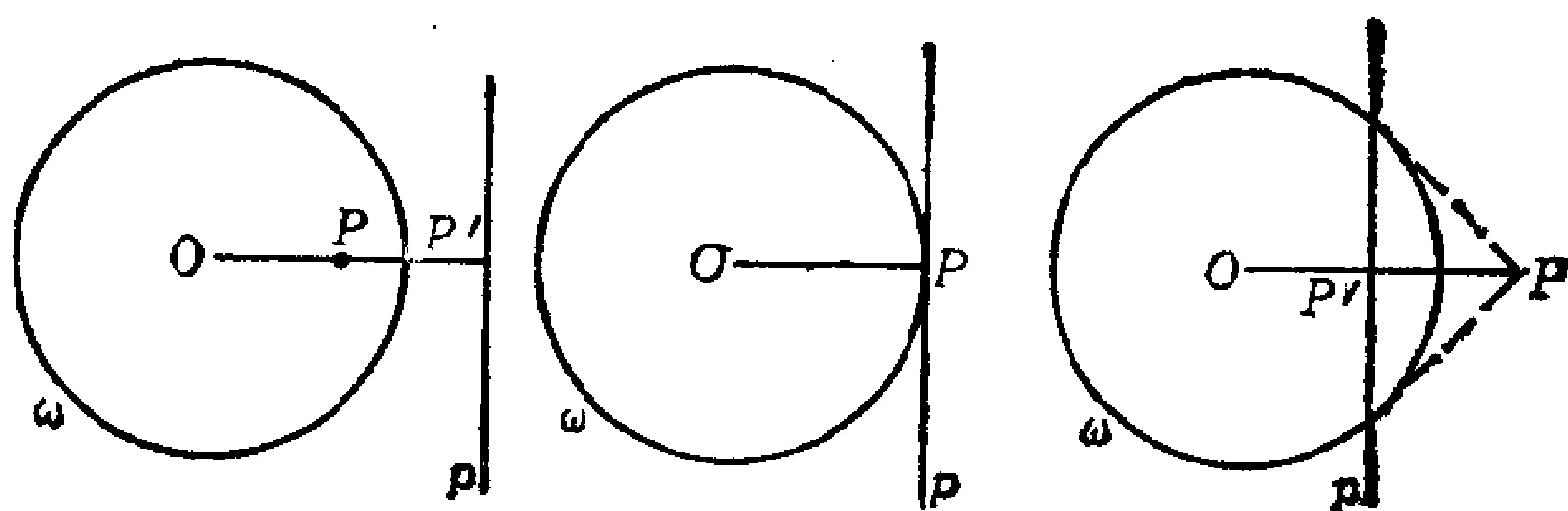


图 6.1 A

如图6.1B，任意一点 A（除去 O 点）的反演像记作 A'，对应的极线记作 a。对于 a 上任意一点 B，作 AB' 垂直于 OB，则 $\triangle OAB' \sim \triangle OBA'$，且

$$OB \times OB' = OA \times OA' = k^2.$$

因此，B' 是 B 的反演像，AB' 是 B 的极线 b。反之，经过 A 点的任意一条直线 b（除直线 OA 外）决定了一条垂线 OB，重新得到了上面给出的图形。这样，我们证明了

定理6.1.1 若 B 在 a 上，则 b 经过 A 点。

让 A 和 a 保持不动，而让 B 和 b 变化，我们就得到：直线 a（不经过 O 点）上所有各点的极线是经过极点 A 的直线。换句话说，一组共线点的极线是一组共点线。这种把点和直

线变到它们的极线和极点的过程称为配极，它保持关联性不变。由此自然地得到对偶原理：如果一个图形是由点和直线构成的，其中一定的点落在一定的直线上，则必有一个由直线和点构成的图形，使得一定的直线经过一定的点。例如，一个完全四角形（由每三点都不共线的四个点及它们的六条连线 AD, BD, CD, BC, CA, AB 组成的图形）的对偶是一个完全四边形（由每三条都不共点的四条直线及它们的六个交点 $a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d, b \cdot c, c \cdot a, a \cdot b$ 组成的图形）。

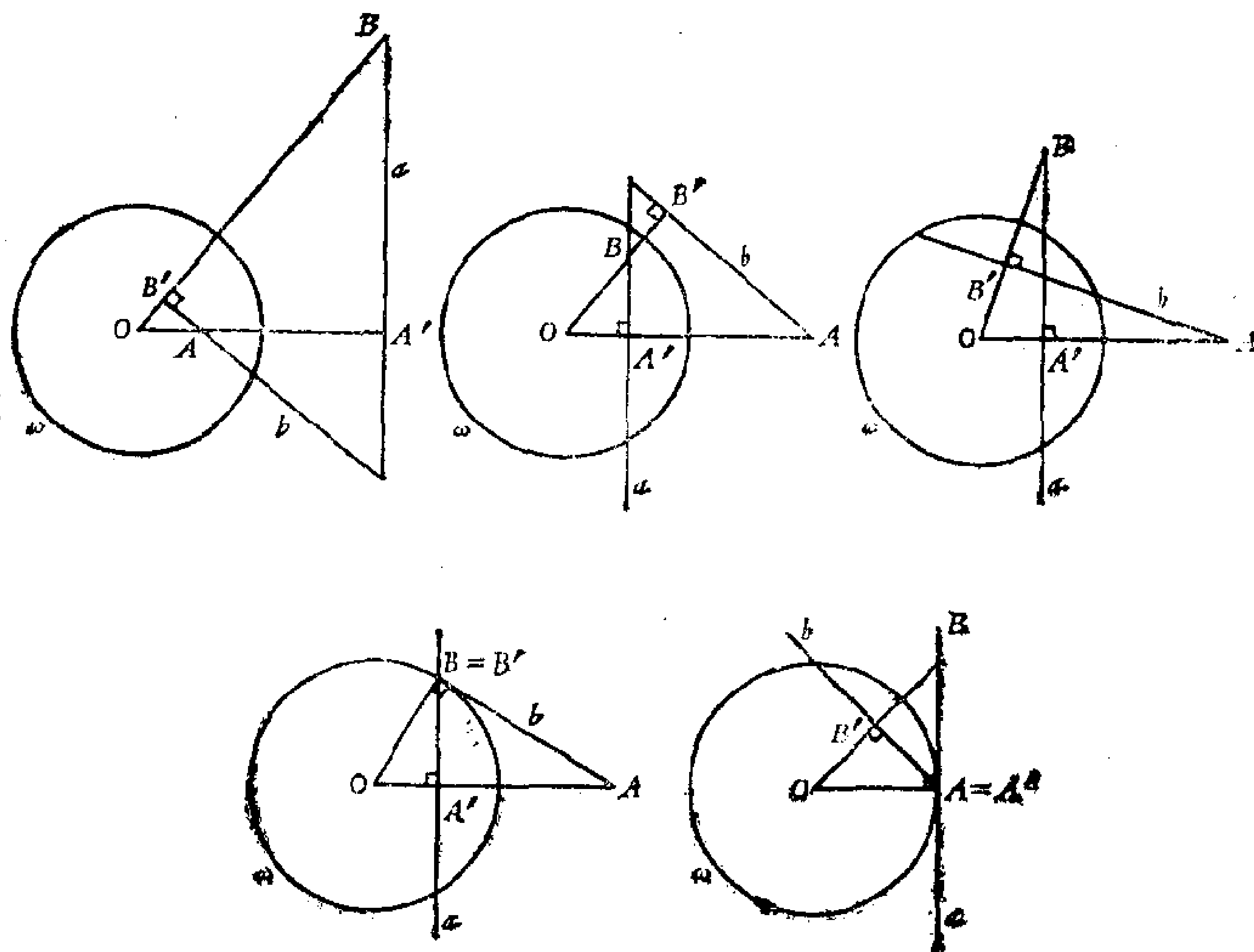


图 6.1 B

一个圆既可以看作点的轨迹，也可以看作直线（圆的切线）的包络(图6.1C)。因为每一条切线是一条割线当它的两个“端点”趋于一致时的极限位置；对偶地，每一个切点是两条切线的交点当这两条切线趋于一致时的极限位置。这样，配极把轨迹换成包络。圆 ω 可以看作轨迹，也可以看作

包络。在配极下，同一个圆从一种意义向对立的意义转化。同样，以O为圆心，以r为半径的圆配极成半径为k^2/r的同心圆(意义改变了)。

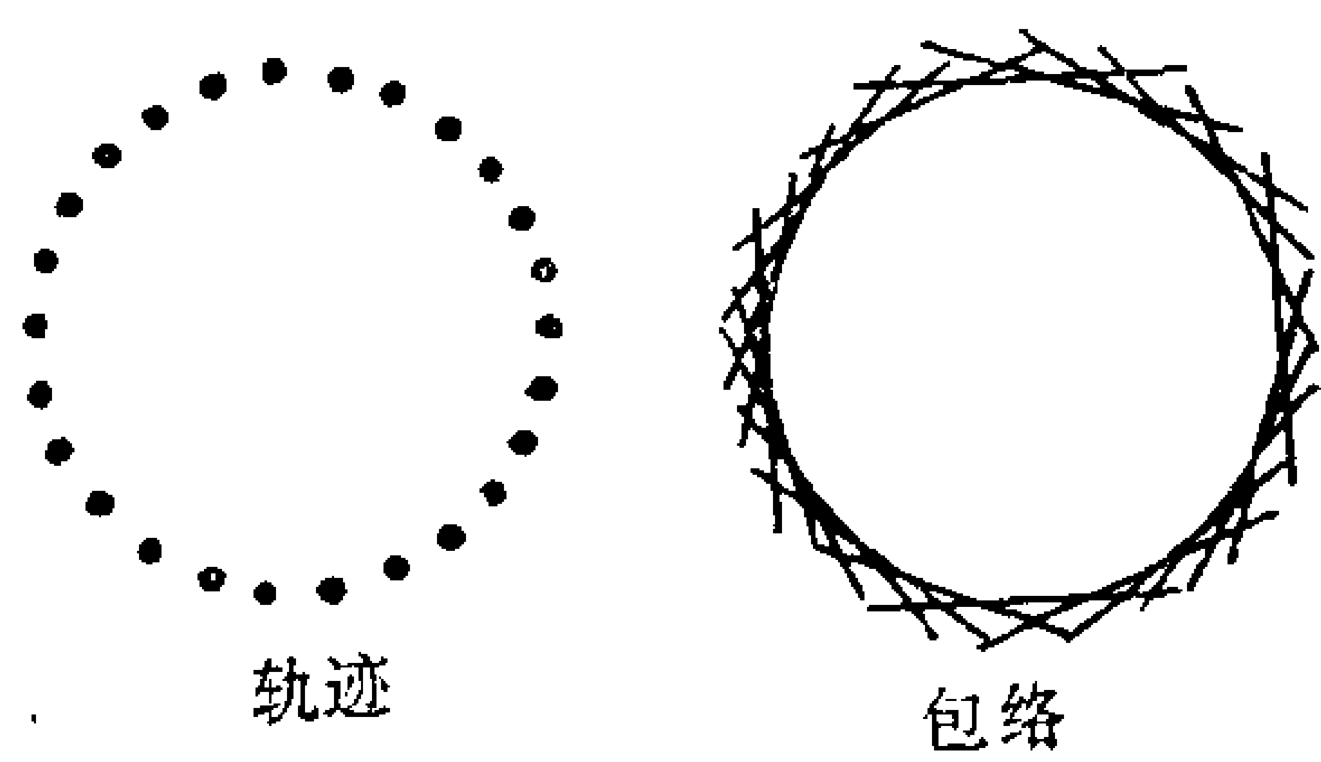


图 6.1 C

按照下面的“词典”逐字进行翻译，就能够很容易地从一个已知定理或构图得到对偶的定理或构图（每一个词要换成在另一列的对应词)。

点	直线
在……上	经过……
联结两点的直线	两条直线的交点
共点	共线
四角形	四边形
极点	极线
轨迹	包络
切线	切点

当两个点和两条直线以定理6.1.1的方式相关时(即一个点落在另一点的极线上)，则称A和B是共轭点，a和b是共轭直线。这样，A的极线是与A共轭的点的轨迹，而a的极点是与a共轭的直线的包络(让圆的半径趋于零就得到点，因此可以认为点是经过它的直线的“包络”)。特别地，切线

a 上任意一点与切点 A 共轭，故 A 是自共轭点；经过 ω 上的点 A 的任意一条直线是切线 a 的共轭直线，故 a 是自共轭直线。

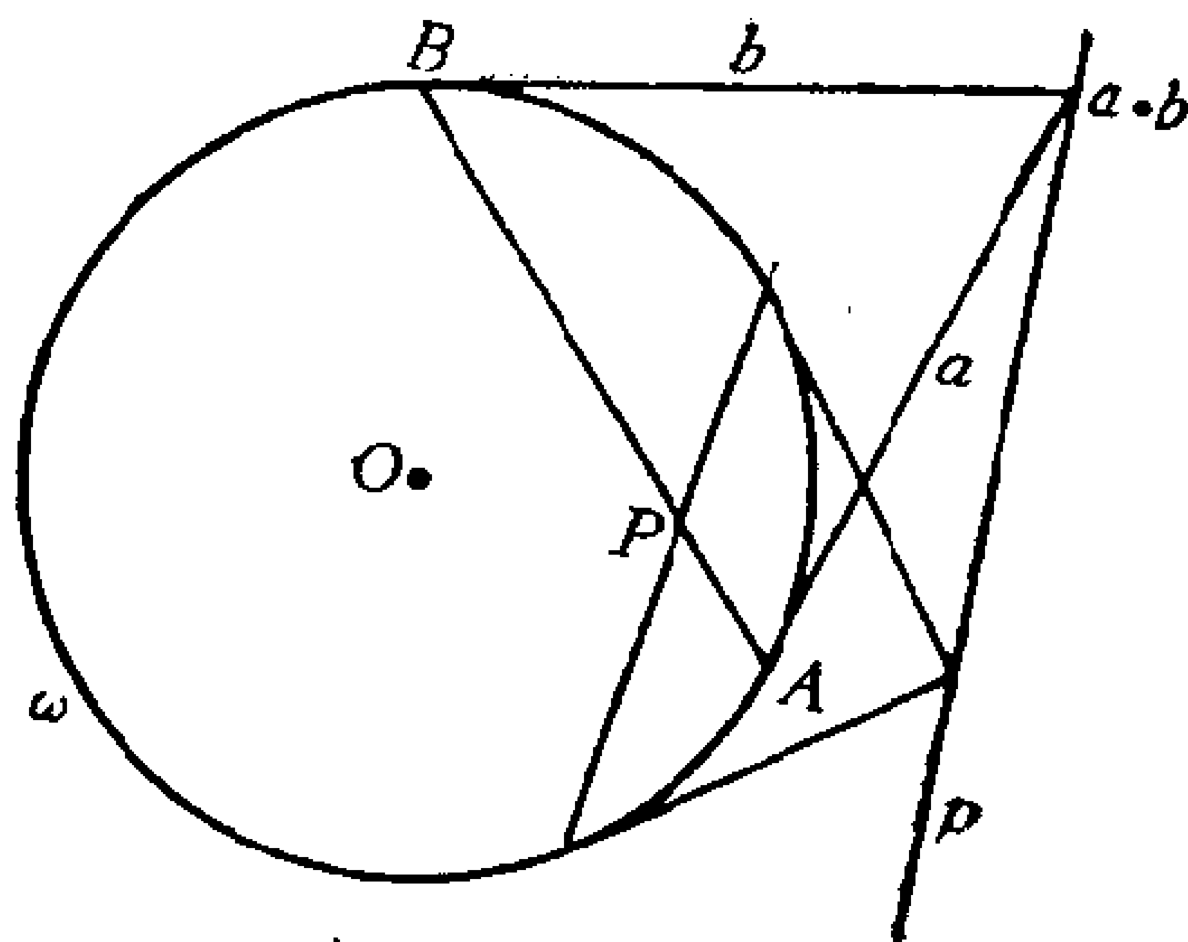


图 6.1D

任意一条不经过 O 点的直线 AB 的极点落在 A, B 两点的极线上，故可把它说成是交点 $a.b$。例如，若 A 和 B 在 ω 上，则割线 AB 的极点是切线 a 和 b 的交点(图6.1D)。对偶地，圆外任意一点落在圆的两条切线上(设为 a 和 b)，则它的极线就是联结切点 A 和 B 的割线。

在任意一条直线 p 上必存在圆 ω 外部的点。若 p 不是直径，则它的极点 P 必在直线 p 的在圆外部的点的极线上，因此只要作这样两条极线的交点就行了。对偶地，任意一点 P 必在圆的割线上。若 P 和 O 不重合，则它的极线 p 必包含这些割线的极点，因此只要作这样两个极点的连线就行了。这些结果可以综合如下：

定理6.1.2 任意一条割线(除直径外) AB 的极点是圆 ω 在 A 和 B 的切线的交点。圆外任意一点的极线是该点向圆所引的两条切线的切点的连线。任意一条直线(除直径外) p 的极点是直线 p 上在圆外的任意两点的极线的交点。任意一点(除圆心外) P 的极线是经过 P 点的任意两条割线的极点的连线。

值得指出的是，如果给出了配极圆 ω 和它的所有切线，则上面的作图法只涉及点和直线的关联性，而不涉及任何度量的性质，这正是射影几何的特征。

习　题

1. 对于圆心为O的圆ω而言，任意一点A(除O之外)的极线是圆ω及以OA为直径的圆的根轴。

2. A和B的极线的夹角等于$\angle AOB$。

3. 以O为中心的正n-角形的顶点和边(看作直线)配极成另一个以O为中心的正n-角形的边和顶点。

4. 以O为中心的矩形配极成一个菱形。

§6.2　三角形的极圆

在图6.1B中，当四点A, B, A', B'各不相同时，则三角形ABC(其中$C=a\cdot b$)有这样的性质：每一个顶点是对边的极点，所以任意两个顶点是共轭的，任意两边也是共轭的。事实上，任意两个共轭点(只要不是自共轭的)都能够作为这样一个自极三角形ABC的顶点。

图6.2A中的三个图(根据图6.1B的前三个图画出的)给出了共轭点A和B的各种可能的典型位置，所以自极三角形必定是钝角三角形，钝角所在的顶点在ω的内部，而其余两个顶点在ω的外部。反过来，任意一个钝角三角形ABC决定了唯一的极圆，使得该三角形关于这个圆是自极三角形。极圆的圆心和半径可以这样决定：既然OA和OB是$\triangle ABC$的高线，所以O是$\triangle ABC$的垂心。用(2.4.4)式的记号，$\triangle ABC$的极圆的圆心是H，半径是

$$\sqrt{HA\times HD}=\sqrt{HB\times HE}=\sqrt{HC\times HF}.$$

因此，关于这个圆的反演便把$\triangle ABC$的顶点变成它的高线足。因为反演把圆变成圆，考虑通过以上两组顶点的圆则得

定理6.2.1　任意一个钝角三角形的外接圆和九点圆关

于三角形的极圆是互为反演的。

换句话说，极圆是三角形的外接圆和九点圆的一个中间圆（因为该三角形是钝角三角形，它的外接圆和九点圆必定相交，因而中间圆有两个）。由此可见，钝角三角形的外接圆，九点圆和极圆是共轴的（它们的圆心在欧拉线上）；并且九点圆经过十一个特殊点（而不仅仅是原来的九个特殊点），另外的两个点是外接圆和极圆的交点。

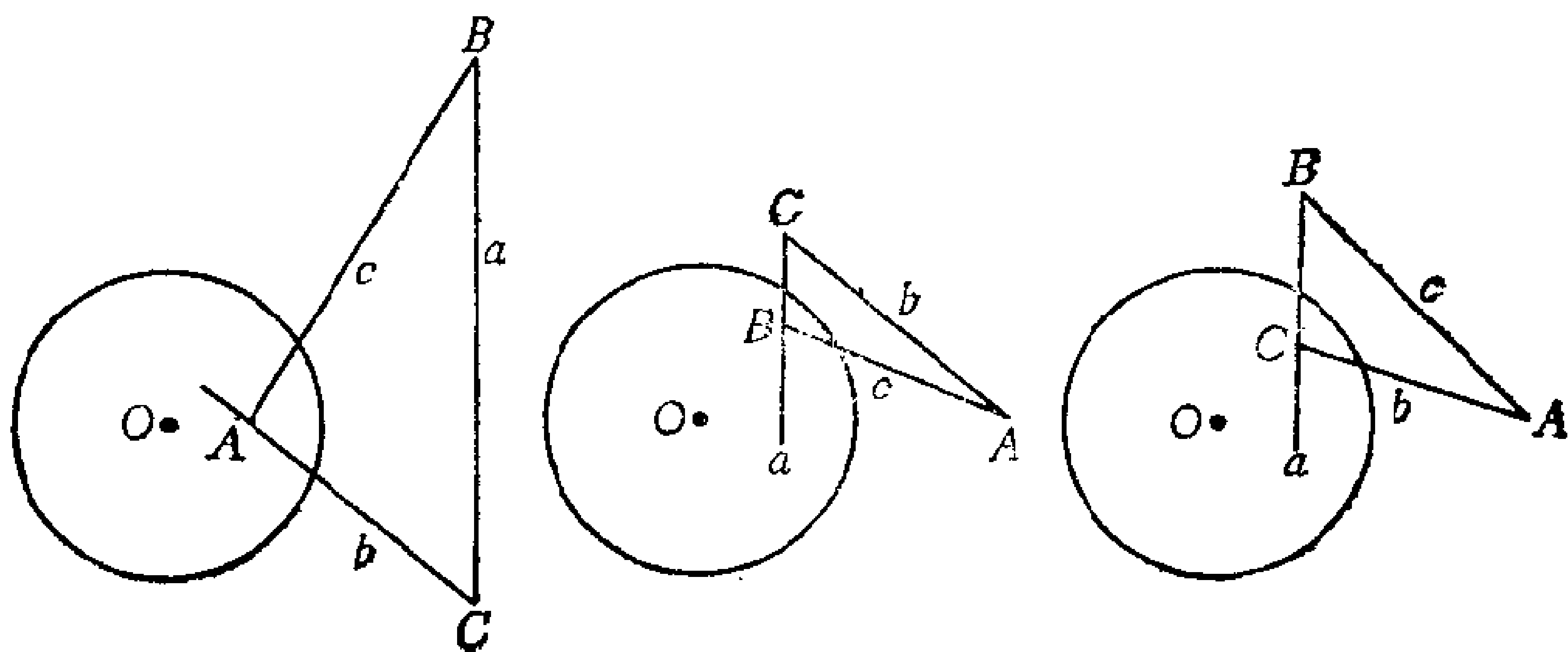


图 6.2A

习 题

在钝角三角形中，极圆和外接圆的交角 θ 适合

$$\cos^2\theta = -\cos A \cos B \cos C.$$

§6.3 圆锥曲线

在 §3.8和 §3.9简略地提到过称为圆锥曲线（或"圆锥截线"）的有趣的曲线，它们可以通过许多不同的途径得到。一种途径是把圆锥曲线定义为圆的配极像。确切地说，设 α 是以 A 为圆心，以 r 为半径的圆，考虑它关于以 O 为圆心的圆 ω 的配极像。圆 ω 的半径 k 是不重要的，因为它只影响圆锥

曲线的尺寸，而不影响它的形状。圆锥曲线的形状由比值

$$\varepsilon = \frac{OA}{r}$$

决定，自然地，这个比称为圆锥曲线的离心率，O 点称为焦点。

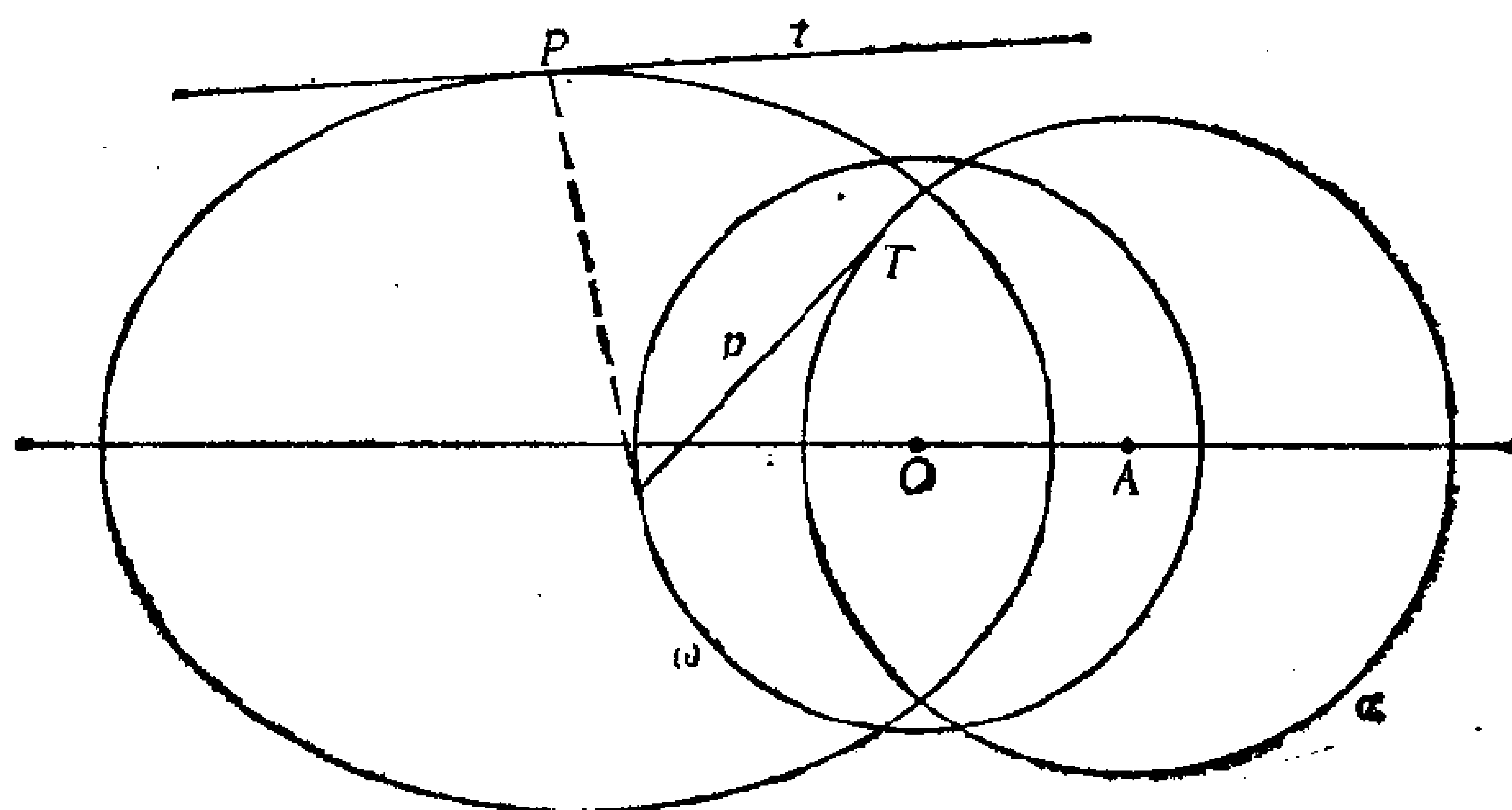


图 6.3 A

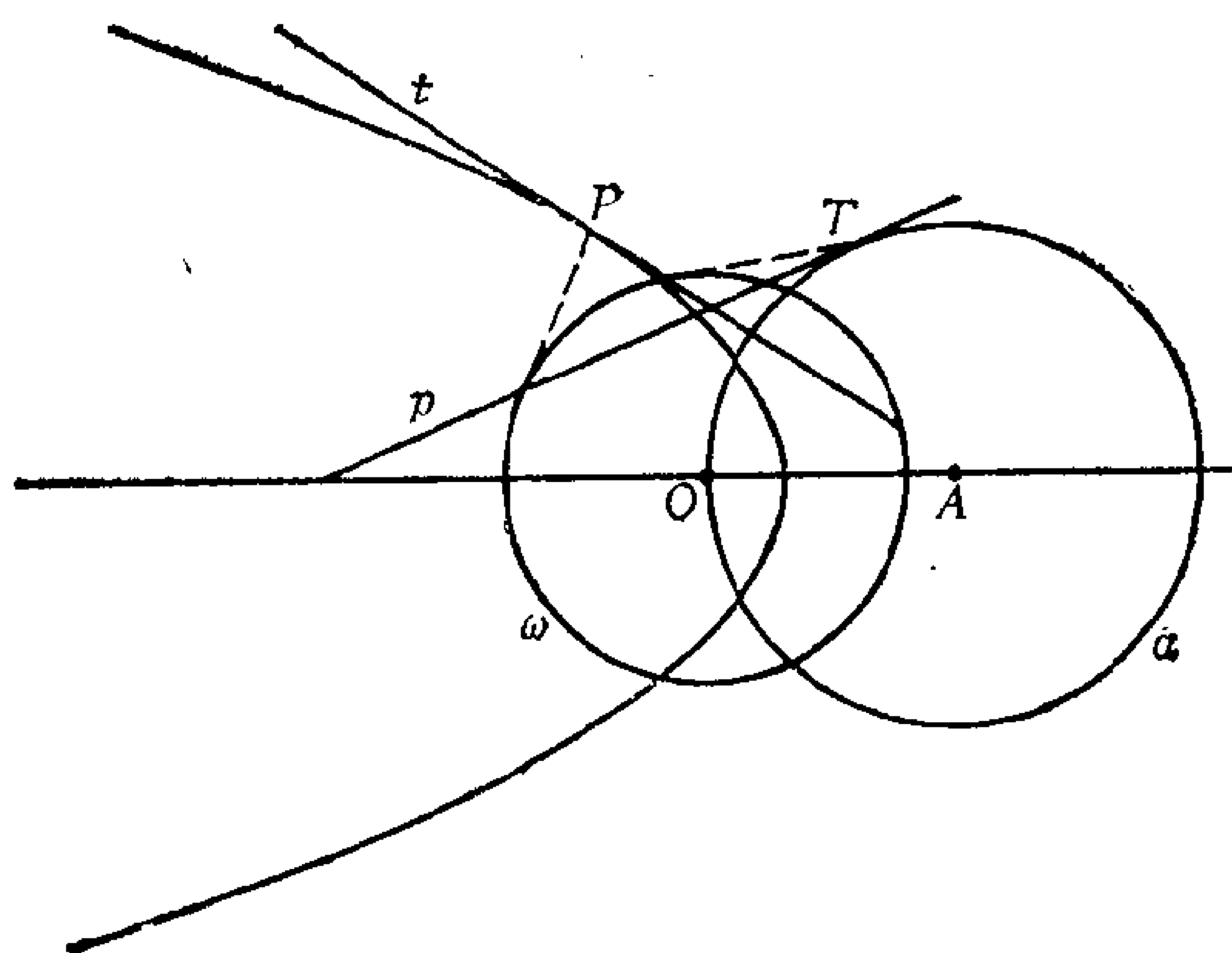


图 6.3 B

当我们把圆锥曲线描述为圆 α 的配极像时，既把它看作 α 的切线的极点构成的轨迹，也把它看作 α 上的点的 极线的

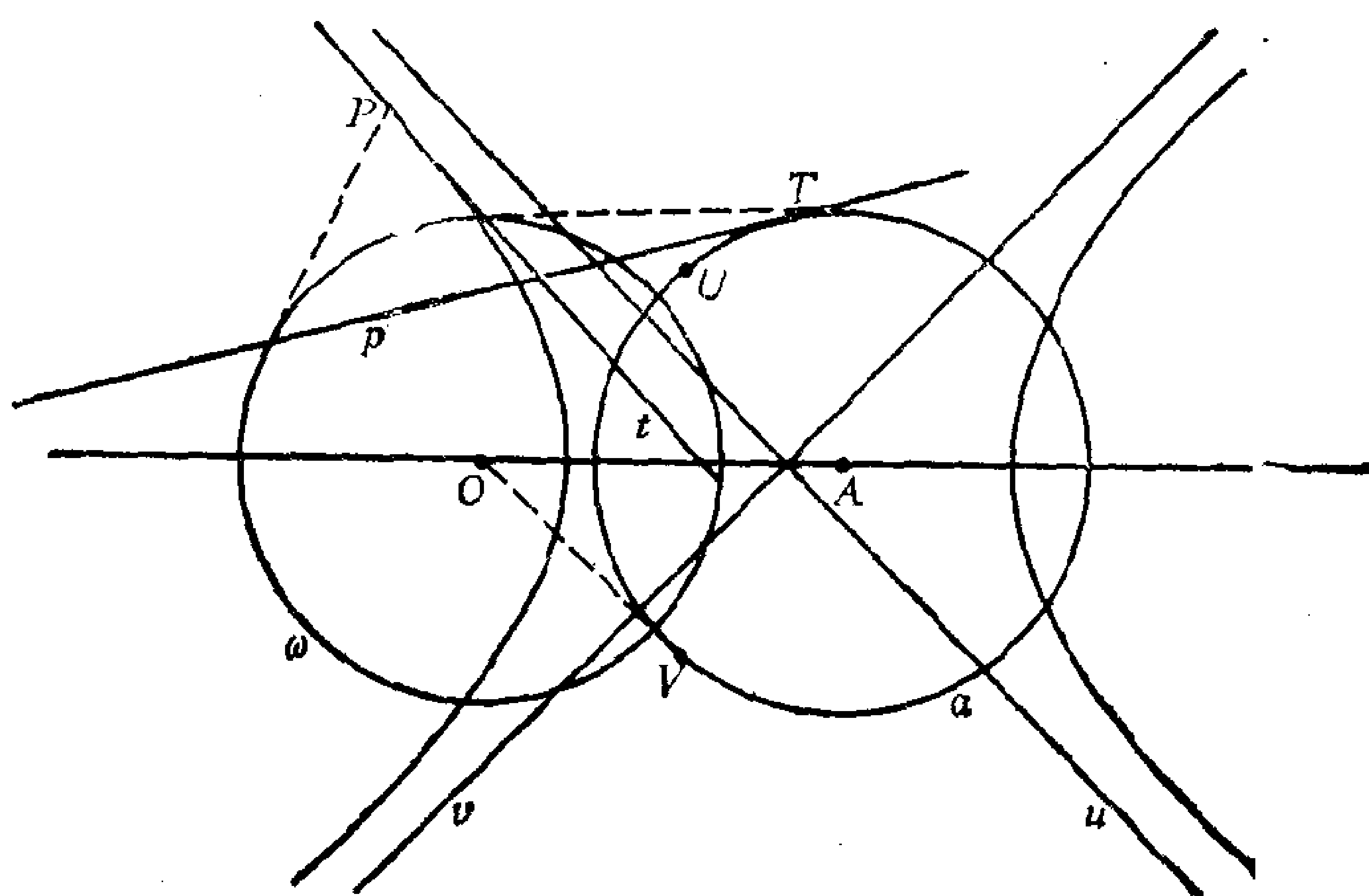


图 6.3C

包络。若 $\varepsilon<1$，则点 O 在圆 α 的内部，从 O 引出的每一条射线上必有属于圆锥曲线的一个点，所以这条曲线是一条卵形线，称为椭圆(图6.3A)。特别地，当 $\varepsilon=0$ 时，该椭圆只是一个圆。当离心率 ε 逐渐增大时，圆锥曲线和圆的差异变得越来越显著。若 $\varepsilon=1$，$OA=r$，则 O 在圆 α 上，即 α 上的点的集合包含点 O 在内，该点(关于 ω)沒有极线；α 的切线的集合包含圆 α 在 O 点的切线在内，该直线沒有极点。因此圆锥曲线在 AO 的方向趋于无穷远，这条曲线称为抛物线（图6.3B）。若 $\varepsilon>1$，则 O 在圆 α 的外部，相应的圆锥曲线称为双曲线(图6.3C)。圆 α 的从 O 点引出的两条切线沒有极点；但是，这两条切线的切点 U 和 V 有极线，称为双曲线的渐近线。这两条渐近线 u 和 v 是属于包络的，但是它们却是沒有切点的切线！沿着其中一条渐近线的一个方向行进时，我们将会看到曲线越来越接近渐近线，但实际上总是达不到的。

牛顿解释了开普勒所观察到的现象，即行星的轨道是以太阳为焦点的椭圆。自从开普勒时代以来，各行星和彗星轨道的离心率 ε 已测量出来了。在下面的表格中列出了其中的一些 ε 值。

行星		彗星	
水　星	0.2056	恩克(Encke)	0.85
金　星	0.0068	比拉(Biela)	0.76
地　球	0.0167	霍尔默斯(Holmes)	0.41
火　星	0.0934	布鲁克斯(Brooks)	0.47
木　星	0.0484	哈雷(Halley)	0.967
土　星	0.0557	多纳蒂(Donati)	0.9963
天王星	0.0472	克奇亚(Coggia)	0.9988
海王星	0.0086	丹尼尔(Daniel)	1.000
冥王星	0.2481	莫尔豪斯(Morehouse)	1.000

习　题

1. 画两个圆 α 和 β，使它们的半径几乎相等，圆心几乎重合，并且圆 α 落在圆 β 的内部。在 α 上取点 $A_1, A_3, A_5, \cdots$，在 β 上取点 $B_0, B_2, B_4, \cdots$ 使得 $B_0B_2, B_2B_4, \cdots$ 与 α 相切于 $A_1, A_3, \cdots$。用 $b_2, b_4, \cdots$ 记直线 $A_1A_3, A_3A_5, \cdots$。用 $C_1, C_3, \cdots$ 记 β 在 B_0 和 B_2 的切线的交点，β 在 B_2 和 B_4 的切线的交点，…。则直线 $b_2, b_4, \cdots$ 是 β 关于 α 的配极像的切线，点 $C_1, C_3, \cdots$ 落在 α 关于 β 的配极像上。

2. 圆 α 关于非同心圆 ω 的配极像以连心线为对称轴。是否能想像圆锥曲线可能有第二条对称轴？

3. 对于抛物线，从焦点向切线所引的垂线是落在一条直线上的。

4. 设双曲线的渐近线和直线 OA 的交角是 θ，则 $\sec\theta=\varepsilon$。试求渐近线互相垂直的双曲线(直角双曲线)的离心率。

5. 对于轨道离心率 $\varepsilon\geq1$ 的彗星会发生什么情况？

§6.4 焦点和准线

当圆锥曲线看作圆心为 A 的圆的配极像时，A(关于配极圆 ω)的极线称为圆锥曲线(对应于焦点 O)的准线。从焦点到圆锥曲线上任意一点的距离称为焦半径。现在我们要建立圆锥曲线的一个最重要的性质（它是由亚历山大里亚的帕普斯在公元四世纪证明的，但是比他早六百年的欧几里得可能已经预见到这个性质)：

定理6.4.1 设圆锥曲线的离心率是 ε，焦点是 O，准线是 a。则对于圆锥曲线上任意一点 P 焦半径 OP 等于从 P 到 a 的距离的 ε 倍。

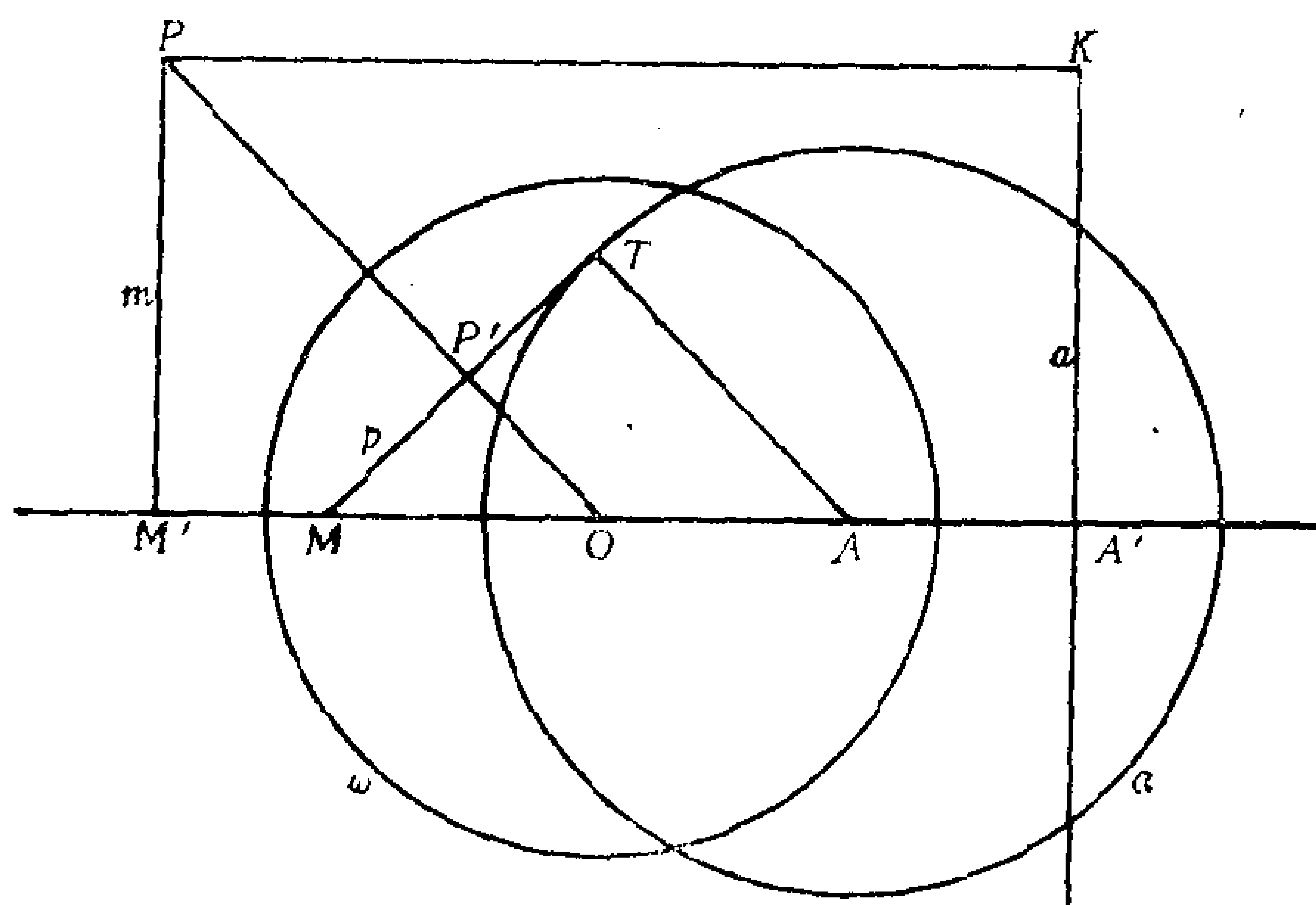


图 6.4A

在图6.4 A，B，C中，直线 p 与 α 相切于 T 点，与直线

OA相交于M点，它（关于圆ω）的极点是P。直线p和OP相交于P'（点P的反演点）。准线a和M的极线分别与直线OA相交于A'（点A的反演点）和M'（点M的反演点）；设K是从P向a所引的垂线足。我们要证明$OP=\varepsilon PK$。为了包括所有各种可能的情形，我们把直线OA上的距离都看作有向距离（例如，当O落在M和A之间时，则有$OM-OA=AM$）。用k和r分别表示圆ω和α的半径，因此得到

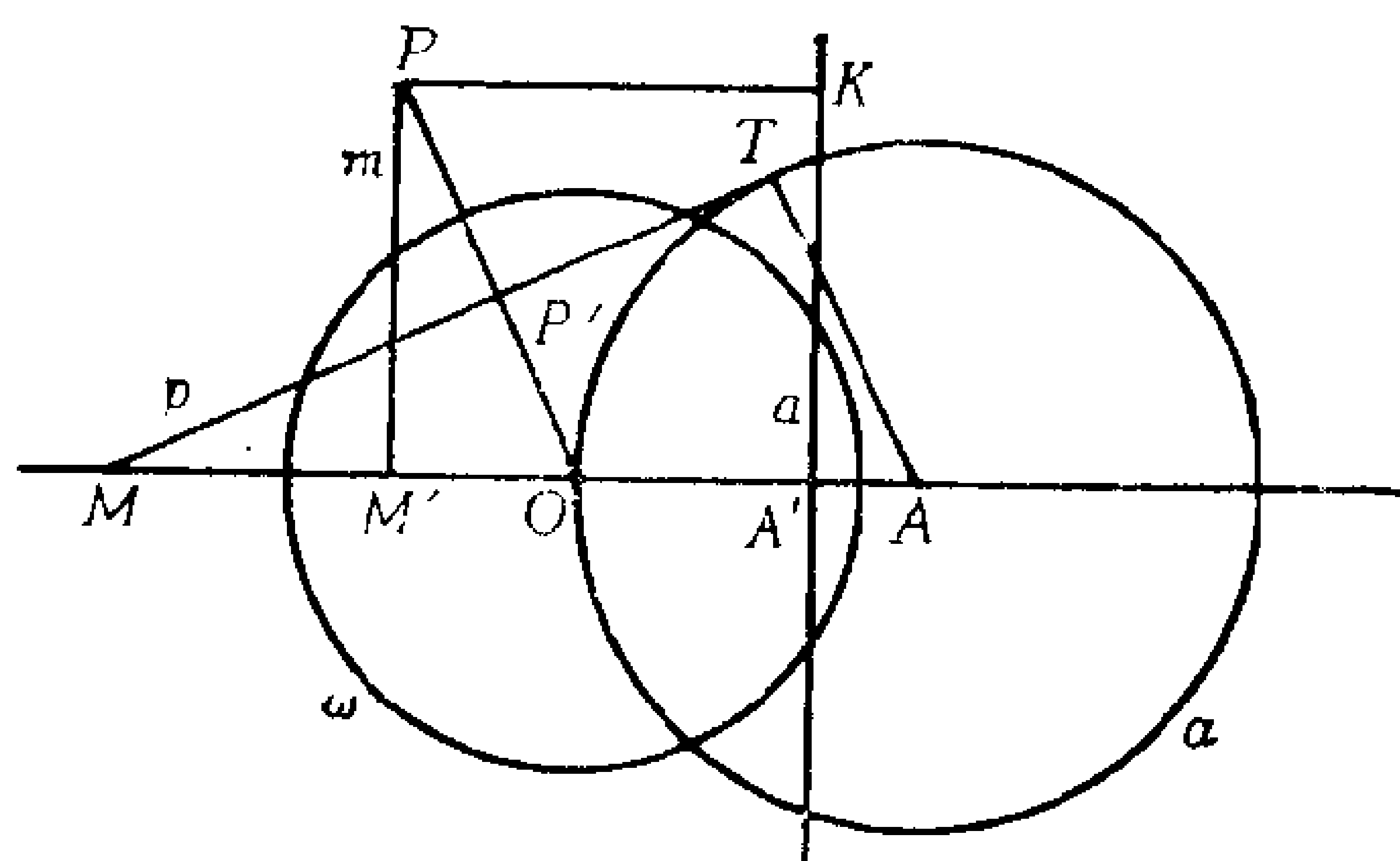


图 6.4B

$$\frac{PK}{OP}=\frac{OA'-OM'}{OP}=\frac{k}{OP}\left(\frac{OA'}{k}-\frac{OM'}{k}\right)=\frac{OP'}{k}\left(\frac{k}{OA}-\frac{k}{OM}\right)$$

$$=\frac{OP'}{OM}\left(\frac{OM}{OA}-1\right)=\frac{AT}{AM}\frac{AM}{OA}\frac{r}{OA}=\frac{1}{\varepsilon}.$$

反过来，我们有

定理6.4.2 对于任意一点O，不经过O点的任意一条直线a及任意一个正的常数ε，则到点O的距离是到直线a的距离的ε倍的动点軌迹是一条圆锥曲线。

为此只要把圆ω取成以O为圆心，且与a相切的圆，设A是它们的切点。再取α是以A为圆心，以OA/ε为半径的圆。

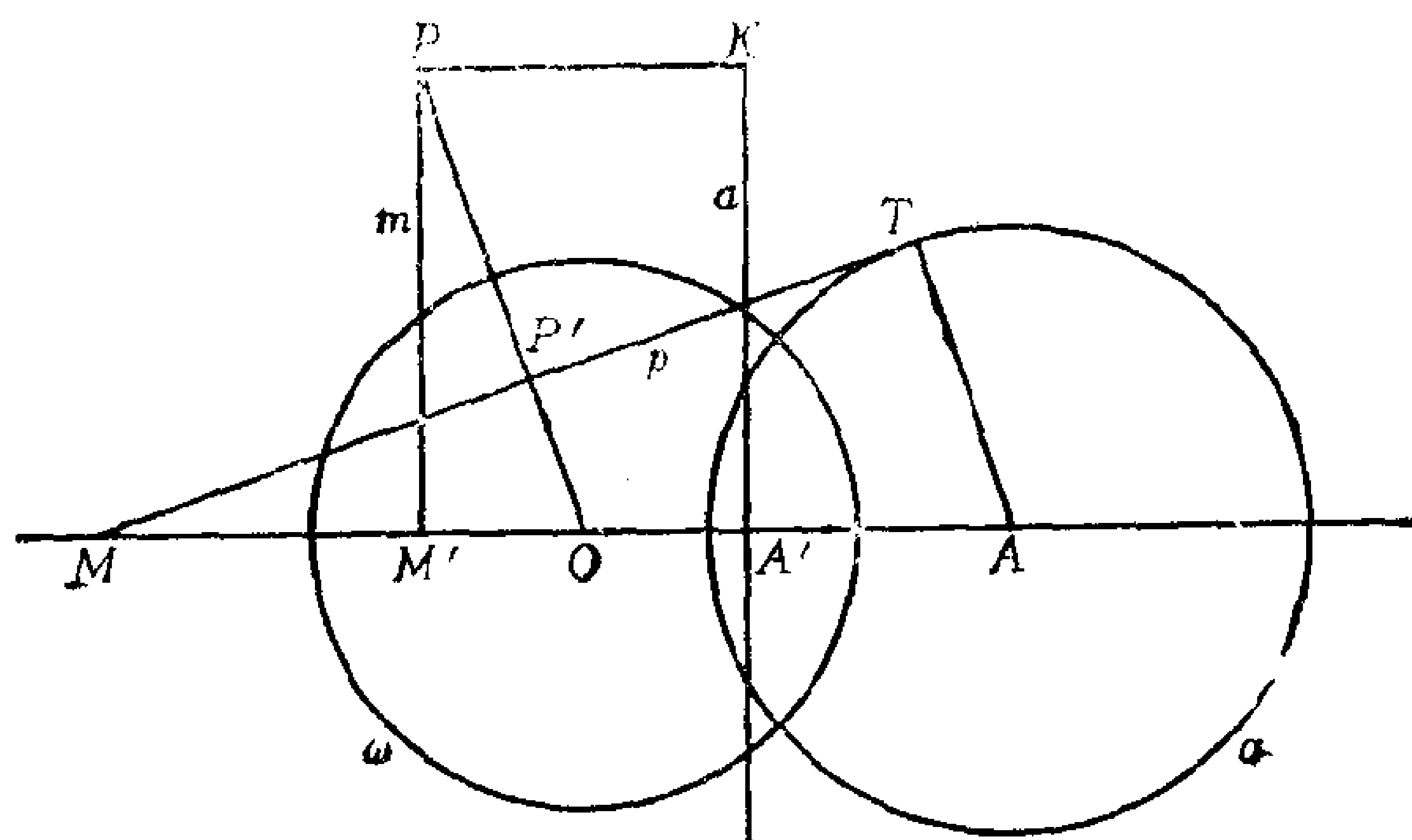


图 6.4C

习　题

1. 设动点P到原点的距离是它到直线$x=l/\varepsilon$的距离的ε倍，求它的轨迹的笛卡儿直角坐标方程。

2. 若$\varepsilon\neq1$，则上题的轨迹与x轴相交于两点。移动y轴使新原点是这两个交点连线的中点。用常数$a=l/(1-\varepsilon^2)$，$b^2=|la|$代替ε和l，化简所得的轨迹的方程。方程的形状说明了曲线有什么样的对称性？

§6.5　射影平面

我们能说配极几乎把每一个点变换成一条直线，把每一条直线变换成一点。例外的情形是点O和经过O点的直线，前者沒有极线，后者沒有极点。在讨论反演的时候，我们把欧几里得平面扩充成反演平面，从而除去了例外点。现在我们要把欧几里得平面扩充成射影平面，去掉上面所说的新的例外情形。我们假定O的极线是一条无穷远直线l_∞，它上面的点（无穷远点）是经过O点的直线的极点。这条新直线和

它上面的点的这个性质是根据已知的事实规定的：直线 a 上的点是经过极点 A 的直线的极点。如果 a 经过 O 点，则 a 上的点的极线构成一个平行直线“束”，它由所有的与 a 垂直的直线组成的。因此，每一个无穷远点(比如直线 a 的极点)必须看作一束平行直线的公共点。所以，在射影平面上可以毫无例外地说：

任意两条不同的直线 a 和 b 唯一地决定了一个交点 $a \cdot b$。

事实上，涉及点和直线的关联性的任何一个定理蕴含着涉及原定理的点和直线的极线和极点的关联性的对偶定理。例如，我们把圆 ω 的外切六角形看作同一个圆的一个内接六角形在顶点处的切线；这样，帕斯卡定理(§3.8)和卜立安香定理(§3.9)是彼此对偶的，其中一个定理可以从另一个定理通过关于 ω 的配极来得到。更一般地说，关于任意一个圆的帕斯卡定理(或卜立安香定理)蕴含着关于成配极的圆锥曲线的卜立安香定理(或帕斯卡定理)。

现在我们可以把定理6.1.2的括号中的例外情形删去而得到简化。而且，我们把这个定理用于任意一个圆 α (除去配极圆 ω)，则利用 ω 可以从 α 得到成配极的圆锥曲线 α'。然后，关于 α 的极点和极线的作图就配极成关于圆锥曲线 α' 的“极线”和“极点”的作图。这样一来，关于一个圆的配极就推广成关于一条圆锥曲线的配极[6, p.75]。定理6.1.2(去掉括号中的例外情形)是由彼此对偶的四部分组成的；因此在配极圆换成一条圆锥曲线时，定理仍旧成立。

用图3.8B的记号，直线 LM 经过点 $N = b \cdot e$，也经过交点 $a \cdot d$。这使我们能够把定理6.1.2的最后一部分(图6.5A)修改成一般点 P 的极线的直接作图法：

定理6.5.1 设 P 是不在圆锥曲线上的任意一点，AD 和

BE 是经过 P 点的任意两条割线，则 P 的极线是交点 $AB\cdot DE$ 和 $AF\cdot BD$ 的连线。

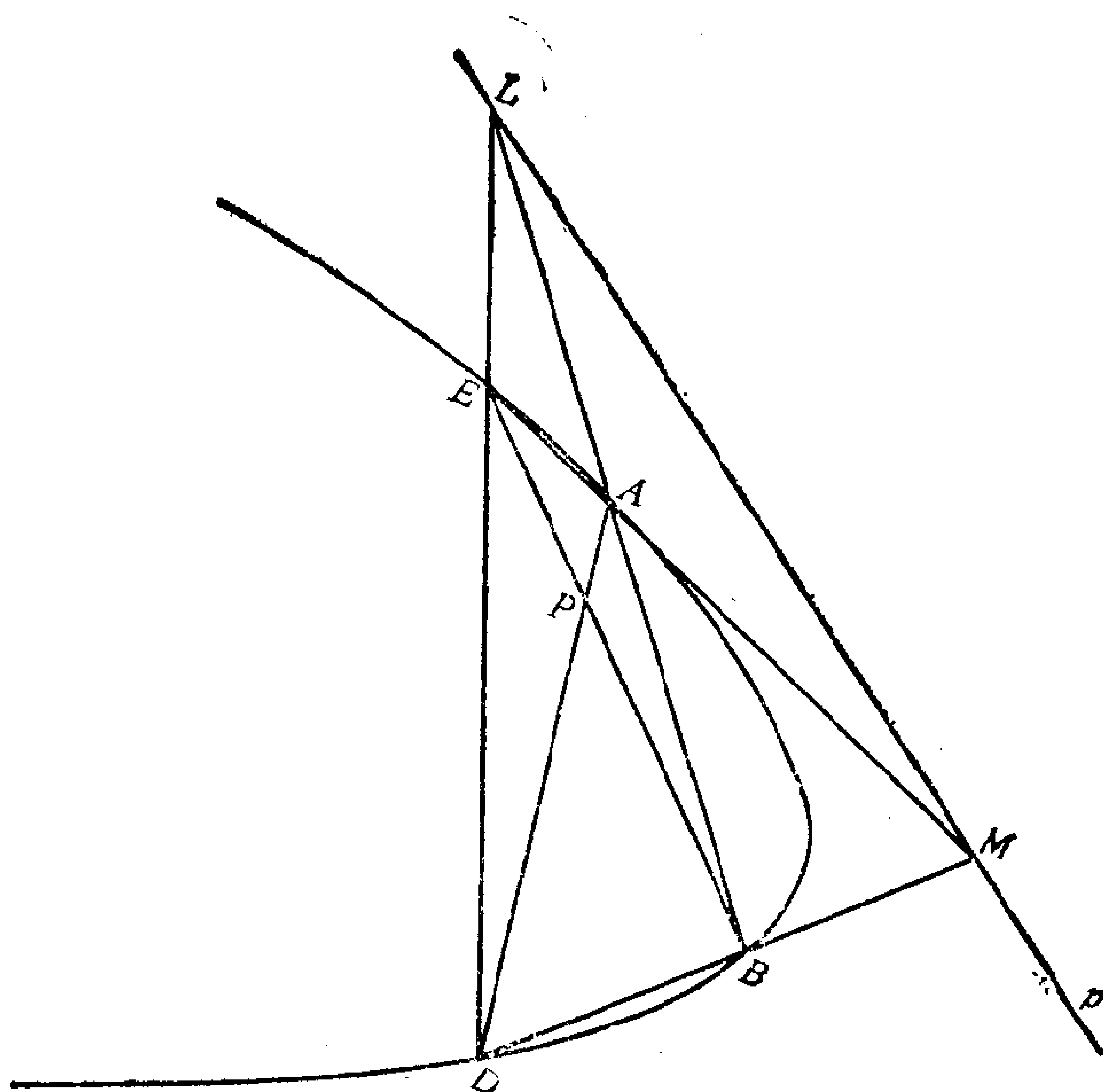


图 6.5A

我们已经看到，关于圆 α 的任意一组极点和极线(关于另一个圆 ω)配极成关于圆锥曲线 α' 的一组极线和极点。特别是(看图6.3 A，B，C)，圆心 A 和 l_∞ 是关于 α 的极点和极线；因此 a 和 O 是关于 α' 的极线和极点：

定理6.5.2 关于除去圆以外的任意一条圆锥曲线，准线是相应焦点的极线。

习　题

1. 把定理3.6.1(迪萨格定理)叙述成在射影平面上的形式，并且写出它的对偶定理。

2. 把定理3.5.1(帕普斯定理)叙述成在射影平面上的形式，并且写出它的对偶定理。

3. 如果关于一个圆的自极三角形以 l_∞ 作为它的一条边，则另外两条边的情形如何？

4. 圆锥曲线按照 l_∞ 是它的不相交线、切线或割线分别成为椭圆、抛物线或双曲线。

5. 双曲线的渐近线是双曲线在它与 l_∞ 的交点处的切线。

6. 对于抛物线，从准线上任意一点引出的两条切线是彼此垂直的。

7. 对于经过完全四角形的四个顶点的任意一条圆锥曲线，三组“对边”的交点是自极三角形的顶点。

§6.6　有心圆锥曲线

自然的一个问题是：椭圆和双曲线的对称性，事实上是否比构造法给出的对称性要多？即椭圆的两端是否是一样的？双曲线的两个分支是否是一样的？下面的讨论给出了所要求的对称性。

把定理6.5.1的记号修改一下，设 C 是不在圆锥曲线上的一点，PP_1 和 QQ_1 是经过 C 点的任意两条割线，则 C 的极线是交点 $PQ\cdot P_1Q_1$ 和 $PQ_1\cdot P_1Q$ 的连线。如图6.6A，若 C 的极线是无穷远直线，则内接四角形 PQP_1Q_1 是一个平行四边形。因为 C 不在圆锥曲线上，故它的极线 l_∞ 不是切线，该圆锥曲线不会是抛物线。因为平行四边形的对角线

互相平分，该点 C（即 l_∞ 的极点）是线段 PP_1, QQ_1 的中点。

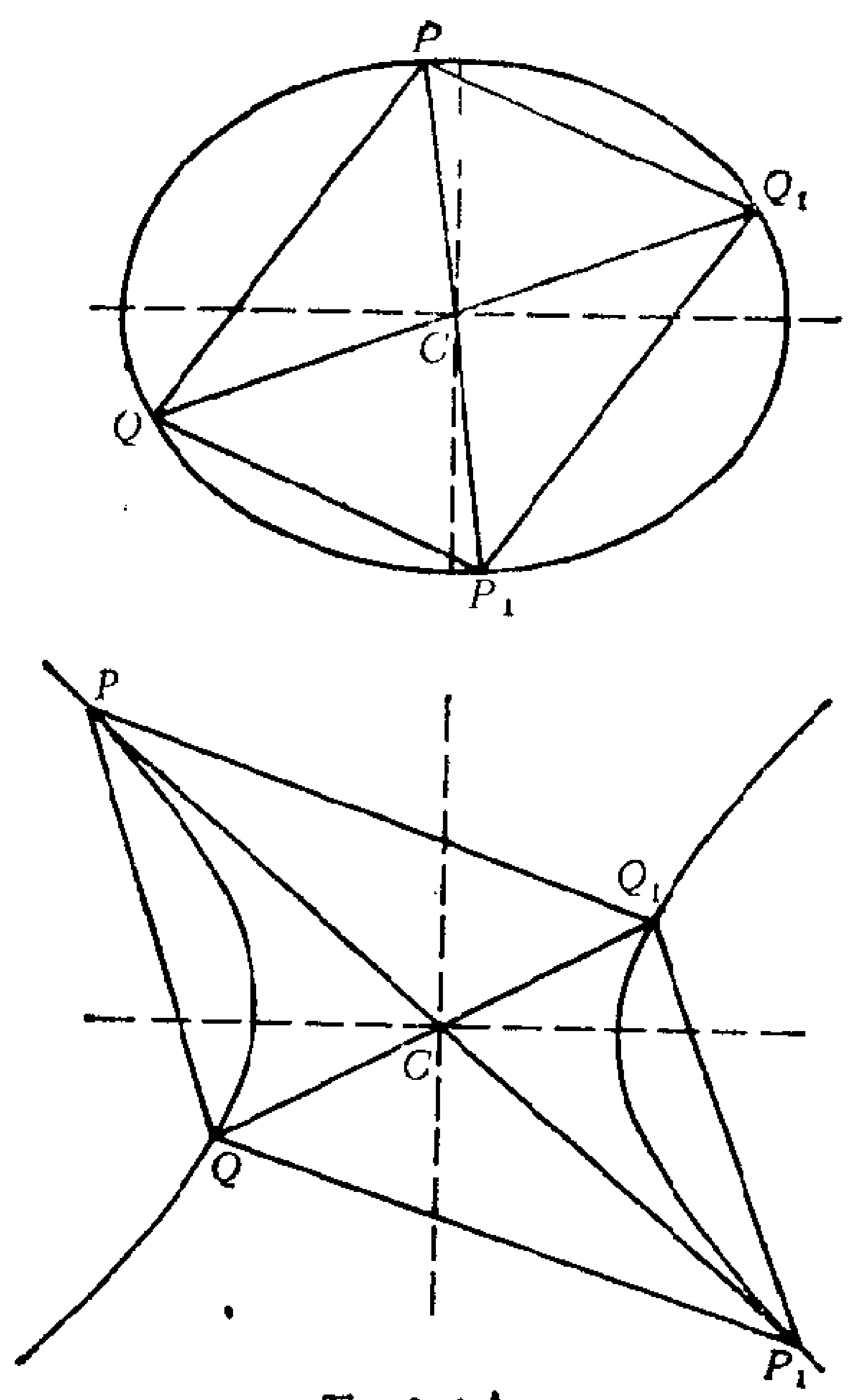


图 9.9A

但是 PP_1, QQ_1 是经过 C 点的任意两条弦。因此，我们把 C 点叫做圆锥曲线的中心，把椭圆和双曲线叫做有心圆锥曲线，于是我们证明了

定理 6.6.1 有心圆锥曲线关于它的中心是中心对称的。

焦点 O 和准线 a（§6.4）在关于 C 点的中心对称下，成为圆锥曲线的第二个焦点 O_1 和第二条准线 a_1，见图 6.6B 以及

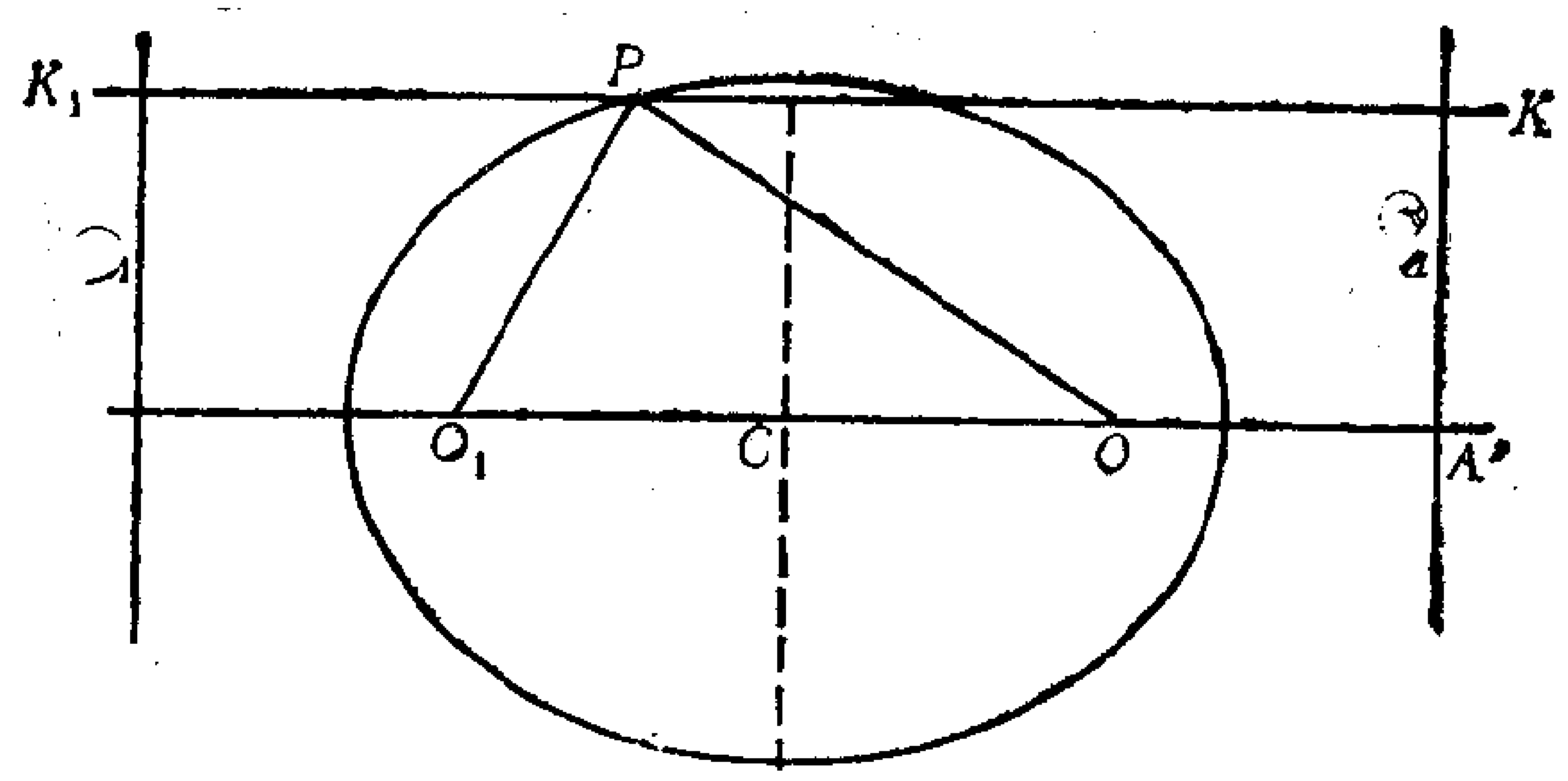


图 6.6B

图6.6C。把中心对称用于§6.3的圆ω和α，则得到一组新的圆ω_1和α_1，使得同一条有心圆锥曲线又是圆α_1关于ω_1的配极像。

如果把O和A重合的平凡情形搁在一边，则显然可知每一条圆锥曲线关于直线OA是对称的；如果该圆锥曲线是有心的，则中心C落在这条直线上。关于C的中心对称可以表示成关于两条互相垂直的直线的反射之和，并且可以取OA为其中一条直线。因此有心圆锥曲线关于经过C，且垂直于OA的直线也是对称的。换句话说，有心圆锥曲线具有与菱形或矩形相同的对称性。

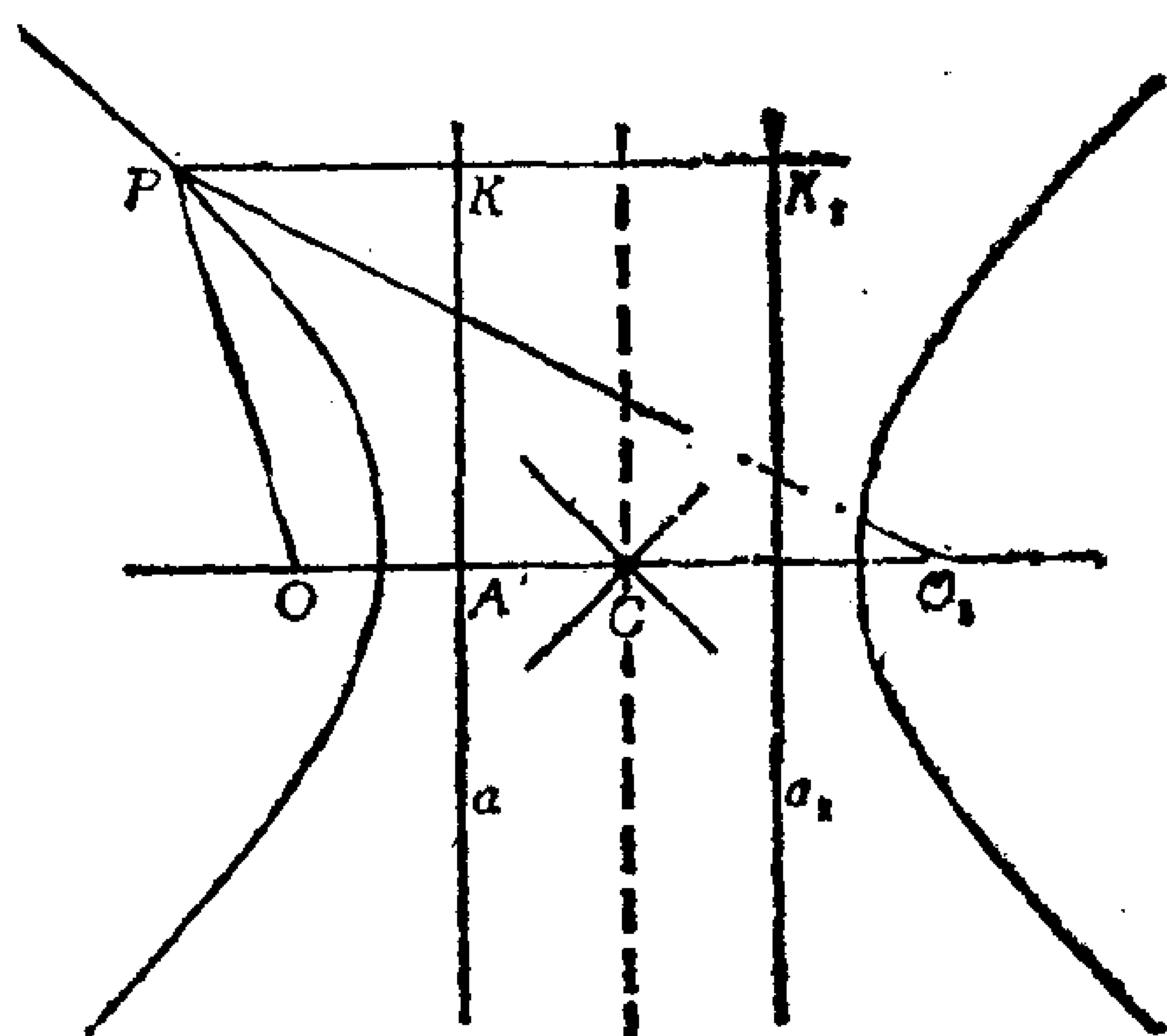


图 6.6C

如图6.6D和E，用c表示C点关于ω的极线。因为C和l_∞是关于a'的极点和极线，故c和O是关于a的极线和极点。这样，C是c的ω极点，而c是O的a极线。换句话说，如果C'是c与直线OA的交点，则C是C'的ω反演点，而C'是O的a反演点。因为(采用有向距离的记法)

$$OC\times OC'=k^2=OA\times OA',\quad r^2=AO\times AC'=OA\times C'A,$$

故 $$\frac{OC}{OA'}=\frac{OA}{OC'}=\frac{OA}{OA-C'A}=\frac{OA^2}{OA^2-(OA\times C'A)}$$

$$= \frac{OA^2}{OA^2 - r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

依照 $\varepsilon<1$ 或 $\varepsilon>1$，上式分别是负的或正的。因此，对于椭圆来说，中心 C 和准线 a 在 O 点的两边，如图6.6 B；对于双曲线来说，中心 C 和准线 a 在 O 点的同一边，如图6.6C。换句话说，椭圆包围了它的两个焦点而整个地落在它的两条准线之间，但是双曲线的两条准线都落在它的两个分支之间的"空隙"之中。

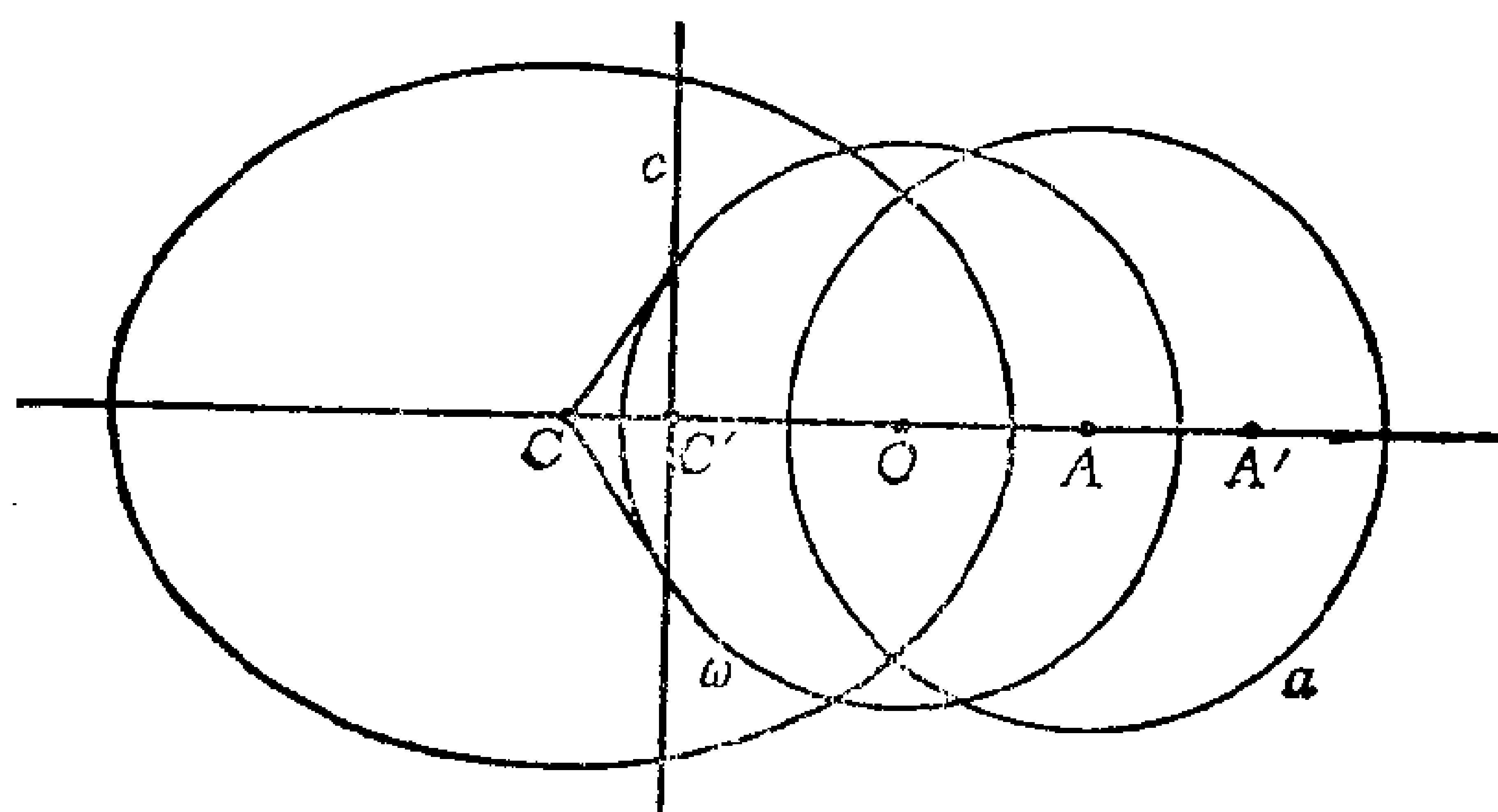


图 6.6D

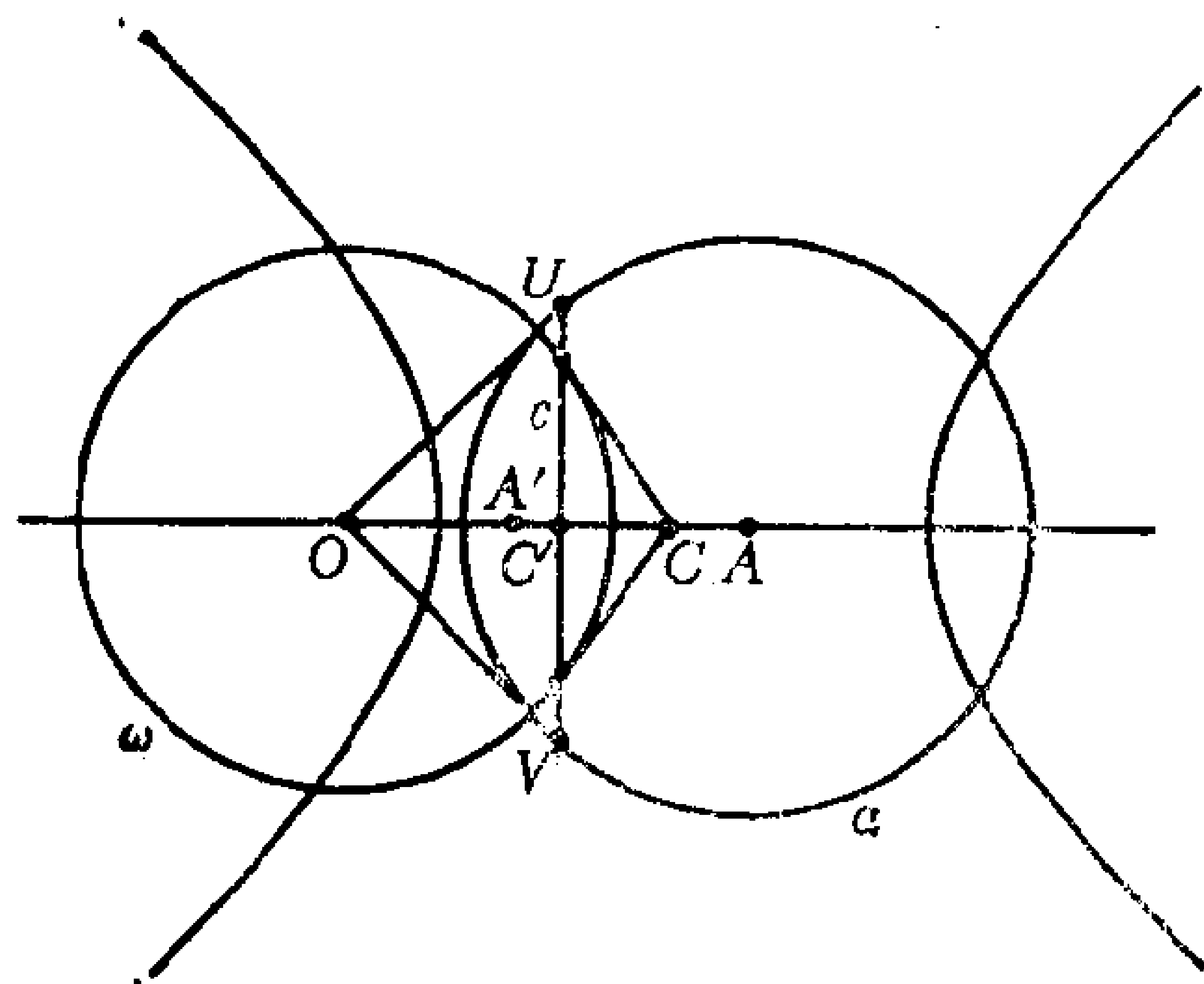


图 6.6E

根据力学定律知道，如果略去空气阻力不计，则抛掷出去的球会沿着一段抛物线弧运动，容易求出这段抛物线的焦点。因为抛掷出去的球，实际上只是维持几秒钟的小人造卫星。因此，更确切

些说，这段仿佛是抛物线的轨迹应该是拉伸得很长的椭圆，它的离心率略小于1．那末，这个椭圆的第二个焦点在哪里呢？不难看出，它正好在地球的中心。

习　　题

1．当点P在椭圆上变动时，它的两个焦半径之和$OP+O_1P$是常数(看图6.6B)。

2．当点P在双曲线上变动时，它的两个焦半径之差$|OP-O_1P|$是常数(看图6.6C)。

3．对于有心圆锥曲线，从它的一个焦点向切线所作的垂线足都落在同一个圆上．(这个圆叫做该圆锥曲线的辅助圆参看[20, pp.13, 25, 255]。)

§6.7　球极投射和球心投影

在§5.3已经看到，欧几里得平面上只有反演圆ω的圆心O沒有反演点．为了避免这种例外，使得反演是整个平面上从点到点的变换，我们可以扩充欧几里得平面，而假定存在一个单独的想象的点作为O的反演点．这个点叫做无穷远点，这样扩充的平面叫做反演平面。

在§6.1已经看到，欧几里得平面上只有配极圆ω的圆心O沒有极线．为了避免这种例外，使得配极是整个平面上的点到直线，及从直线到点的变换，我们便扩充欧几里得平面，假定有一条单独的想象的直线作为点O的极线．这条直线叫做无穷远直线，这样扩充的平面叫做射影平面。

于是，欧几里得平面有两种不同的，然而同样是合理的扩充方式．这个要紧的看法似乎还沒有为大家广泛地了解．我们通过在空间中的考虑以及比较两种从球面到平面的最简

单的映射，进一步阐明这两种扩充的方式。

反演的第一个定义（§5.3）可以容易地推广成关于球面的反演。已知以O为球心，以k为半径的球ω，P是不同于O的任意一点，则P的反演像定义为在射线OP上的一点P'，它到O的距离满足关系式

$$OP \times OP' = k^2.$$

如果把图5.3B所在的平面放到三维空间中去看，并且把它绕着直线OA旋转，则我们立即看到球（包括平面，它们被看作半径无限大的球）反演成球。特别地（看图5.3B的第二个图），如果α是反演球ω在A点的切平面，则α的反演像α'是以OA为直径的球。α和α'上在反演下的对应点实际上可以不参照球ω而直接从对方得到。在平面α上给定一点P（看图6.7A），则对应点P'是直线OP与球α'的第二个交点。反过来，在球α'上除O点外任意给定一点P'，则对应点P是直线OP'和平面α的交点。为了避免例外情形，自然要求我们把α改成反演平面，而所添加的单独的无穷远点应该是当P'在O点时对应点P所占据的位置[6,p.83]。

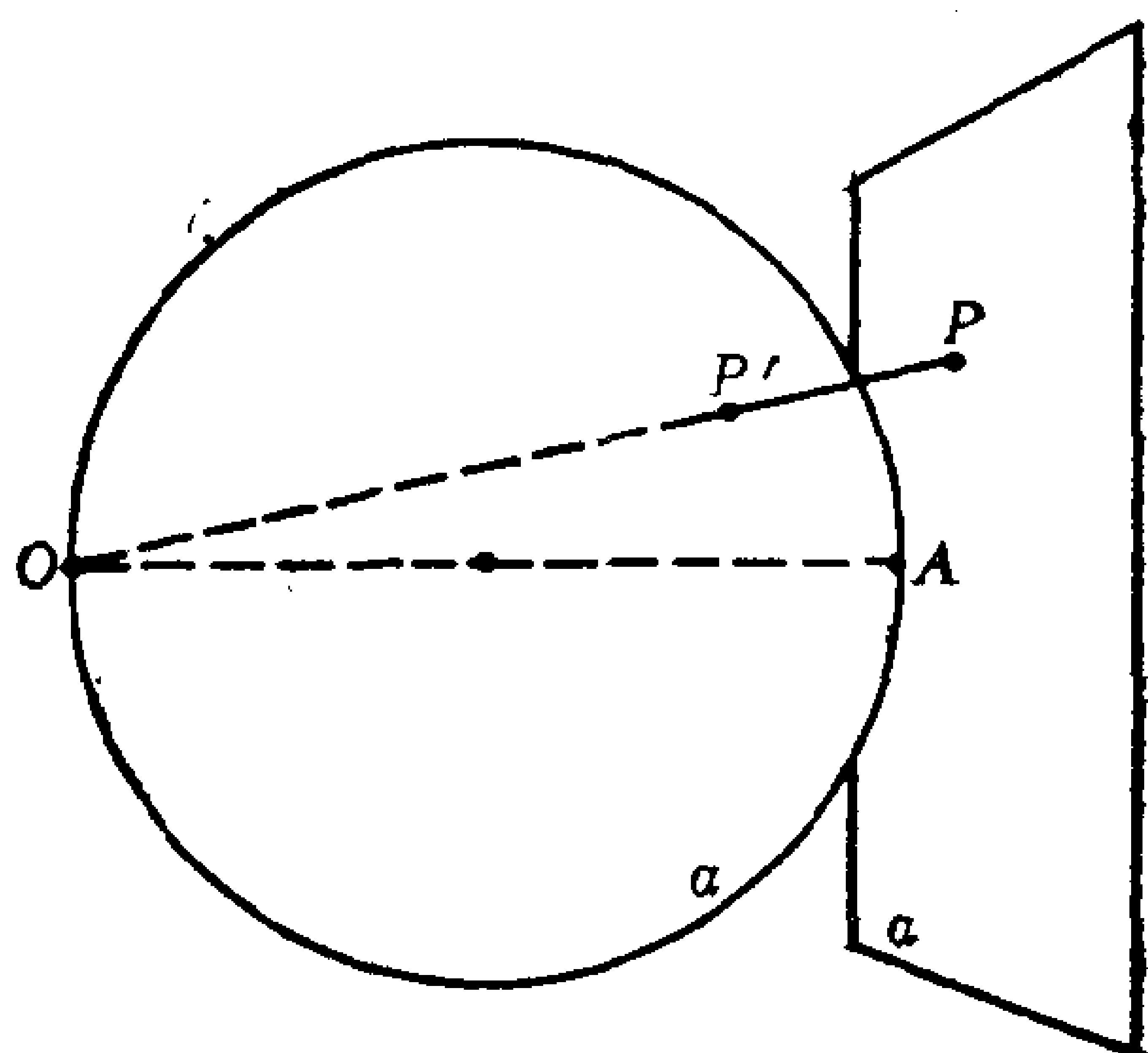


图 6.7A

从球面α'到平面α上的这个映射称为球极投影。当我

们注意到这种投影是一种特别的反演时，容易看出圆投影成圆。事实上，因为球反演为球(或平面)，而任意一个圆可看作两个球的交线，因此空间中任意一个圆反演成一个圆(特别是球面 α' 上的圆也如此)。

从球 α' 到它的切平面 α 上的另一种投影是球心投影。原来的投影是从 O 点(A 的对径点)作出的，而现在的投影是从 α' 的球心(即 OA 的中点)作出的。因为通过该点的任意一个平面与球 α' 交成一个大圆，与平面 α 交成一条直线，所以 α 上的每一条直线是从大圆投影得来的，而 α 上的每一点是从球的一对对径点(如图6.7 B 中的 P_1' 和 P_2') 投影来的。反过来，任意给定一个其所在平面与 α 不平行的大圆，则该平面与 α 的截线就是大圆在平面 α 上的对应直线。为了避免例外情形，自然要求把 α 改成射影平面，使得添加进去的单独一条无穷远直线对应于例外的大圆。这条想象的直线上的点(无穷远点)对应于这个大圆上的一对对径点。因此，在射影平面上说每两条直线有一个公共点相当于在球 α' 上每两个大圆有一对(成对径点的)公共点(也就是经过球心的每两个平面交成一条直线)[13, p.56]。

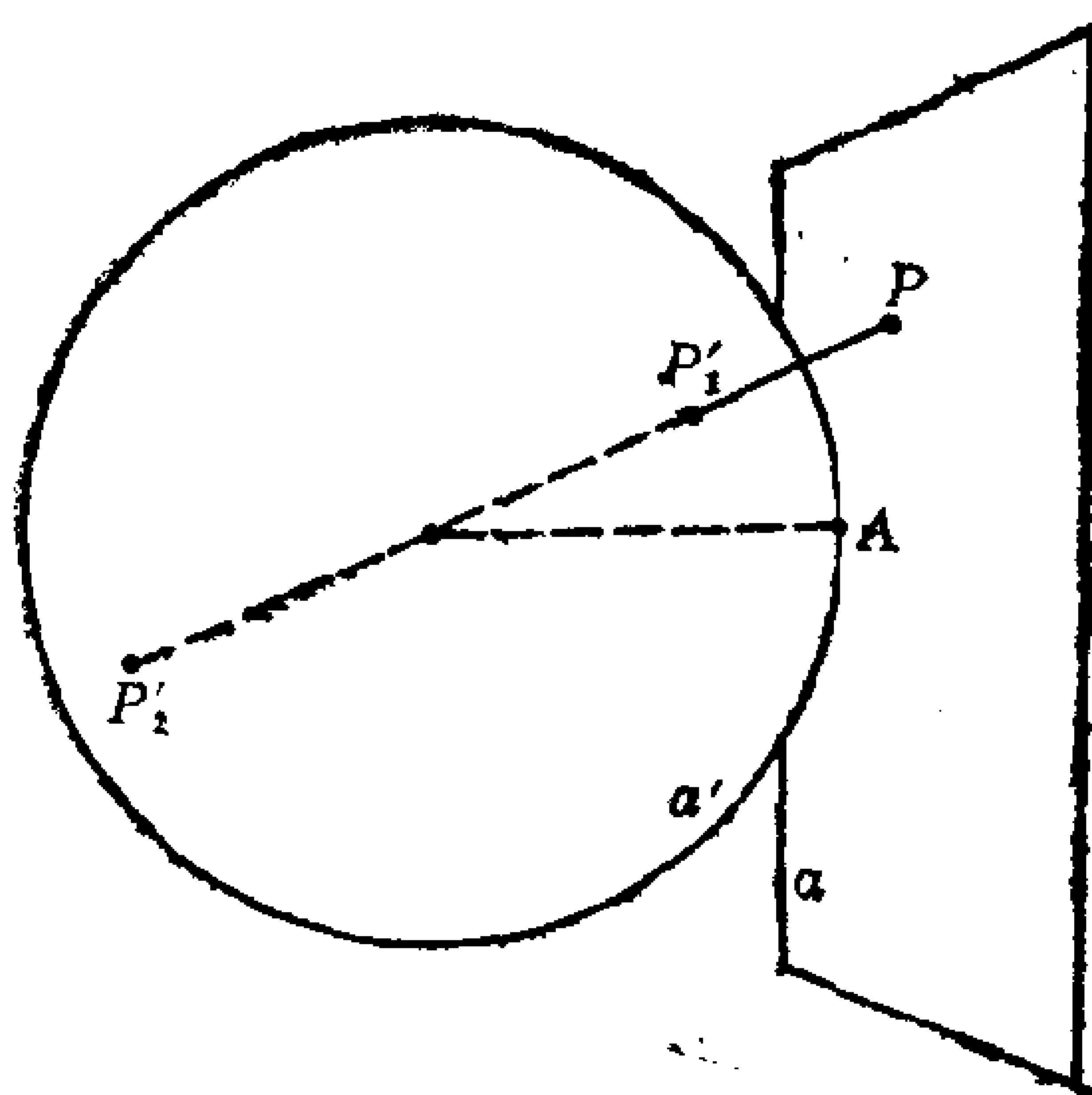


图 6.7 B

既然射影平面上所有的点(包括无穷远点)都是从球上的

对径点偶通过球心投影得来的，因此通常把射影平面看作在球面上把对径点抽象地等同起来(也就是把一对对径点称作一个点)而得到的[6, p.94]。

从实际画地图的观点来看，尽管球极投影和球心投影都有它们的实用价值，但是这两者都是不理想的。前者的优点是从一点引出的两个方向的夹角在投影下保持不变，因而小的岛屿的形状在投影下不会走样。后者的优点是球上两点之间的最短线映为直线段。

在定理5.4.1中，我们已看到交比在反演下是保持不变的。在配极下交比是否具有不变性呢？在共线点组的情形这是对的[7, pp.118-119]。确切的说法是：在直线 p 上四个点的交比等于它们的极线与不经过 p 的极点 P 的任意一条直线相交所得的四个交点的交比。要讲清楚这一点需要较长的篇幅，所以不在此赘述了。

掌握了上述这些观念的读者可以较容易地理解射影几何学的公理化叙述的意义(例如看[7])。在公理化叙述中你会见到从一个完全不同的观点叙述的迪萨格定理、帕普斯定理和帕斯卡定理，然而了解这些定理的本来的面目无疑是有好处的。

习　题

1. 球极投影是保持夹角不变的。

2. 球极投影把 α' 上的每一个大圆变换成 α 上的圆(或直线)，这个圆(或直线)与 α 上一个固定的圆在对径点处相交。

3. 若 P_1', P_2' 是 α' 上一对变动的对径点，P_1, P_2 是它们的球极投影像，那么在平面 α 上的什么样的变换下 P_1 点

变成了 P_2 点?

4. 利用球极投影，试把正方体的六个面上的内切圆变成§5.8习题3所述的六个圆.

习题的提示和答案

他的答案缓缓地通过我的头脑，
仿佛是清水流经筛子白白地漏走！

C. L. 多德桑

§1.1

1. BC 上的高线把边 a 分成两条线段：$b\cos C$ 和 $c\cos B$，然后相加（或相减）。

2. 用 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$ 代入，再化简。

3. $(ABC)=\frac{1}{2}ab\sin C$，$\sin C=\frac{c}{2R}$。

4. $c=2p\sin B=\frac{pb}{R}$，$b=2q\sin C=\frac{qc}{R}$，相乘并化简。

§1.2

1. 因为 $BX=XC, CY=YA, AZ=ZB$，用塞瓦定理。

2. 因为 $BX=c\cos B, XC=b\cos C$，等等，再用塞瓦定理。

3. 设 BB' 和 CC' 相交于 O，OA 和 $A'B'$ 相交于 A_1。因为 $\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$，故

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A_1B'}{AB}.$$

因此 A_1 和 A' 重合

4. 因为 $\angle CXA$ 和 $\angle AXB$ 互补，与它们的余弦有关的项彼此相消。

§ 1.3

1. 钝角三角形内接于一段劣圆弧。它的两条高线和对边的延长线相交。

2. 利用图1.3B，作 $A'D$ 平行且等于 BB'，则 $A'CDB'$ 是平行四边形，它的中心 E 是 CB' 的中点。于是 $\triangle DAA'$ 的边平行且等于 $\triangle ABC$ 的三条中线，且

$$\frac{(ABC)}{(DAA')}=\frac{(CAA')}{(EAA')}=\frac{CA}{EA}=\frac{4}{3}.$$

3. 如图1.3B，设 BB' 和 CC' 是相等的中线，其交点是 G。因为 $BG=\frac{2}{3}BB'=\frac{2}{3}CC'=CG$，$\triangle GBC$ 是等腰三角形，$\angle C'CB=\angle B'BC$。根据全等三角形的边角边法则，

$$\triangle C'CB\cong\triangle B'BC,\quad 故\ B=C.$$

4. 设 BE 和 CF 是两条相等的高线，因为

$$b\cdot BE=2(ABC)=c\cdot CF,\quad 故\ b=c.$$

5. 用图1.3D的记号，则有 $\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b}$ 等等。

6. 由斯蒂瓦特定理（§1.2习题4），

$$a\left(p^2+\frac{1}{4}a^2\right)=\frac{1}{2}a(b^2+c^2),$$

因此

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

7. 因 $m=kc, n=kb, k=a/(b+c)$，用斯蒂瓦特定理。

8. $12\sqrt{2}/7$。

9. 在图1.1A和B中，添加高线 CF，则有 $\triangle BCJ\sim\triangle FCA$，故 $BC/CJ=FC/CA$。

§ 1.4

1. 用图1.4A的记号，它们的半径是 x, y, z，这样 $y+z=a, z+x=b, x+y=c$。相加便得 $x+y+z=s$，等等。
2. 利用定理1.4.2和§1.1的习题3。
3. 因 $AY=AZ=x, BZ=BX=y, CX=CY=z$，用塞瓦定理。
4. 角 A 的内平分线和外平分线彼此成直角。
5. $(ABC)=(I_aCA)+(I_aAB)-(I_aCB)=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a$

   $=(s-a)r_a$。

   另外，$\triangle AI_aY_a \sim \triangle AIY_b$，故 $r_a/r=s/(s-a)$。
6. $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=1$。

§ 1.5

1. 因为 $\angle BCM=48°=\angle CMB, \angle CBN=12°=\angle BNC$，故 $BM=BC=CN$。注意傍心 I_a 落在线段 BM 上，但不落在线段 CN 上。
2. 引理1.5.1.2在用于波特默(Bottema)三角形时自然是对的。但是在用"外角平分线"代替"内角平分线"时，圆 BCN 与 BM 的交点 M' 在 E 的远离 M 的一侧，故我们不能断定 $BM>BM'$。
3. 方程 $BM=CN$ 蕴含着

$$ca\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]=ab\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right],$$

因此

$$a(a+b+c)\{(a+b+c)(a^2+bc)+2abc\}(b-c)=0.$$

§1.6

1. 因 $BCEF$ 内接于圆，故

$$\angle AEF=B,\qquad \triangle AEF\sim\triangle ABC.$$

对其余三角形也如此。

2. H 仍旧落在 $\angle EDF$ 的内角平分线上，但是在 $\angle FED$ 和 $\angle DFE$ 的外角平分线上。

3. 看第 2 题的答案。

4. $\angle HAC=90^\circ-C$，$\angle OAC=90^\circ-B$。

§1.7

2. 参考图1.6A，可见 $OA'^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2$。记 $n=GA'$，则 $AG=2n$，$AA'=3n$。由 §1.3的习题6，

$$3n=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

将斯蒂瓦特定理（§1.2习题4）用于$\triangle OAA'$，则得

$$3n(OG^2+2n^2)=2nOA'^2+n\,OA^2$$
$$=n\left(2R^2-\frac{1}{2}a^2+R^2\right),$$

故

$$OH^2=(3OG)^2=9R^2-\frac{3}{2}a^2-18n^2$$
$$=9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

3. 为确定起见，不妨假设 $b>c$（否则，只要交换 B 和 C 的位置）。由毕达哥拉斯定理，$BA^2-BD^2=AA'^2-DA'^2$，

即

$$c^2-\left(\frac{a}{2}-DA'\right)^2=\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)-DA'^2,$$

因此 $aDA'=\frac{1}{2}(b^2-c^2)$。

4. 如果欧拉线平行于 BC，则它三等分 AD，故 $OA'=AD/3$。再把 AD 和 OA' 代换成下列表达式：

$$AD=b\sin C=2R\sin B\sin C,$$

$$OA'=R\cos A=R(\sin B\sin C-\cos B\cos C)。$$

§ 1.8

1. $OA'=\frac{1}{2}AH=AK$，且 OA' 平行于 AK。
2. 根据 § 1.6最后的说明，EF 垂直于 OA，且垂直于平行直线 $A'K$。这样，直径 $A'K$ 平分弦 EF 和弧 EF。
3. $\triangle ABC$ 是 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂三角形。
4. 设 P 是公共点，且 D, E, F 是 P 在圆 PBC, PCA, PAB 上的对径点。则 PA, PB, PC 分别作为 EF, FD, DE 的垂直平分线也垂直于 BC, CA, AB。因为 $\triangle ABC$ 的边分别等于 $\triangle DEF$ 的边的一半，故前者的外接圆半径等于后者的外接圆半径的一半，即已知圆的直径的一半。
5. 因为 DK 垂直于 BC，KA' 是直径，故圆在边 BC 截出的线段所对的圆周角是

$$\angle DKA'=\angle HKN=\angle HAO=|B-C|。$$

（看 § 1.6的习题4）。

§ 1.9

1. 延长 CP 到 D，构成等边三角形 BDP。因为 $\triangle DCB\sim$

$\triangle PCQ$，$DB/PQ=DC/PC=1+(DP/PC)$。用 $DB=PB=DP$ 去除，则得 $(1/PQ)=(1/PB)+(1/PC)$。

2. 首先放宽条件，容许 $ABCD$ 为矩形。如果假定 $PD<CD$，则 $\angle CPD>60°$，$\angle DPA<75°$，$AD<PD<CD$。反过来，如果假定 $PD>CD$，则所有的不等号都要翻转过来。无论哪种情形，$ABCD$ 都不会是正方形。因此，当 $ABCD$ 是正方形时，必须有 $PD=CD$。

   另法：作$\triangle BQC\cong\triangle APB$（看图1.9C）。则 $\triangle BPQ$ 是等边三角形，CQ 的延长线垂直平分 PB，且 $CP=CB=CD$。同理，$DP=DC$。

3. 选取点 Q，使 $BCPQ$ 和 $ADPQ$ 为平行四边形。因

$$\angle BAQ=\alpha=\angle BPQ,$$

   四点 A,B,Q,P 共圆。因此

$$\gamma+\varepsilon=\angle APB=\angle AQB=\angle DPC=\delta+\varepsilon,$$

   从而 $$\gamma=\delta.$$

   （此解答是索科洛夫斯基(D.Sokolowski)提供的。）

4. 设 DF 平行于 BC，且与 AB 相交于 F。设 CF 与 BD 相交于G。因为 $\triangle BCG$ 是等边三角形，$BG=BC$。因 $\triangle CBE$ 是等腰三角形，$BE=BC$。因此 $\triangle BGE$是等腰的，

$$\angle BGE=80°,\qquad \angle FGE=40°.$$

   因 $\angle EFG=40°$，$\triangle FEG$ 是等腰的，$FE=EG$。又有$DF=DG$。故$\triangle GDE\cong\triangle FDE$，$DE$ 平分 $\angle FDG$，$\angle EDB=30°$。

5. 等弧的四个端点和等边三角形的另外两边的中点构成一个正六角形。将等边三角形的另外两边各延长边长的一半，则得一个较大的等边三角形，它的三条边分别包含

上面的正六角形的相间的三条边。现在，结论是明显的。

§2.1

1. $-R^2$。圆心。
2. 同心圆。
3. 切线的长度。
4. $PT^2-PU^2=OU^2-OT^2=OQ^2-OT^2=QT^2$。
5. $R(R-2r)=R^2-2rR=d^2\geqslant 0$。但是 $R>0$，故

$$R-2r\geqslant 0.$$

6. 幂是 $d^2-R^2=-2rR$。
7. 在图1.2C中把A记成P，把X记成A，则得

$$BC(PA^2+BA\times AC)=PC^2\times BA+PB^2\times AC,$$

即

$$BC(PA^2+CA\times AB)+PB^2\times CA+PC^2\times AB=0.$$

8. 用U和V三等分BC，使$BU=UV=VC$。因GU平行于AB，GV平行于AC，故

$$GX\cdot\left(\frac{1}{GX}+\frac{1}{GY}+\frac{1}{GZ}\right)=1+\frac{VX}{VC}+\frac{UX}{UB}$$

$$=1+\frac{VX-UX}{VC}=1+\frac{VU}{UV}=0.$$

9. 89英里。

§2.2

1. 根轴；当两圆相交时，要去掉两个圆的落在根轴上的公共弦。
2. 四个中点都落在根轴上。

3. 因为$\triangle PAB\sim\triangle AQB$，$\angle PBA=\angle ABQ$，故$Q$落在$BP$上，且$PB/AB=AB/QB$。因为$\triangle AQB\sim\triangle ABR$，$\angle BAQ=\angle RAB$，故$R$在$AQ$上，且$AQ/AB=AB/AR$。因为

$$PB\times QB=AB^2=AQ\times AR,$$

故A，B到圆PQR的圆心是等距的，这个圆关于线段AB的垂直平分线是对称的。因此P'，Q'，R'都在这个圆上(它们是圆和BR，AP'，AP的其余的交点)。

4. 把方程写成$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$，当$c<a^2+b^2$时，它代表一个圆。

5. 画一个圆，使它的圆心不在两个已知圆的连心线上，并且它与第一个已知圆相交于A和B，与第二个已知圆相交于C和D。从直线AB和CD的交点向已知圆的连心线作垂线，这就是根轴。

§2.3

1. 设在T点的切线与AB相交于O点。因为

$$\triangle OAT\sim\triangle OTB \text{ 和 } OT=OP,$$

故
$$\frac{TA}{TB}=\frac{OP}{OB}=\frac{OA}{OP}=\frac{OP-OA}{OB-OP}=\frac{AP}{PB}.$$

再用定理1.3.3的逆定理。

2. 从O点向各个圆引出的切线都相等。

§2.4

1. 在图2.4B中，点D，E，F是HD'，HE'，HF'的中点。因此$\triangle D'E'F'$的边与垂三角形DEF的边分别平行。

2. $\angle MLN=\angle MLA+\angle ALN=\angle MBA+\angle ACN=\frac{1}{2}B$

$+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}(B+C)$。同理，$\angle NML=\frac{1}{2}(C+A)$，

$$\angle LNM=\frac{1}{2}(A+B).$$

§2.5

1. 不需要。
2. B的对径点。
3. 顶点落在它自己的西姆松线上。
4. 作 PB, PC, C_1A_1, A_1B_1. 由圆内接四角形

$$A_1PB_1C \text{ 和 } A_1BC_1P$$

得到
$$\angle A_1B_1P=\angle A_1CP=\angle BCP$$
$$=\angle C_1BP=\angle C_1A_1P$$
$$\angle PA_1B_1=\angle PCB_1=\angle PBC=\angle PBA_1$$
$$=\angle PC_1A_1,$$

故 $\triangle PA_1B_1\sim\triangle PC_1A_1$.

§2.6

1. 因 $AB=BC=AC$，再用定理2.6.1和定理2.6.2.
2. 作对角线 AC, BD, 把托勒密定理用于 $PABC$ 和$PDAB$. 则 $PA+PC=PB\cdot\sqrt{2}$，$PB+PD=PA\cdot\sqrt{2}$.
3. 因为 $\angle QPR=\angle QAR=\angle CAD=\angle ACB$，又有$\angle PRQ=\angle PAQ=\angle BAC$，故 $\triangle PQR\sim\triangle CBA$. 由托勒密定理得到 $AP\times RQ+AR\times QP=AQ\times RP$. 因此 $AP\times AB+AR\times BC=AQ\times AC$.

§2.7

1. 设 OH 是 $\triangle ABC$ 的欧拉线，PP' 是外接圆直径. 由定

理2.7.2，P 和 P' 的西姆松线分别平分 HP 和 HP' 于 M 和 M'。因为 O,M,M',N 是 PP',HP,HP',OH 的中点(定理1.8.2)，N 也是 MM' 的中点。因为 $NM=OPR=R/2$ 是九点圆的半径(定理1.8.1)，MM' 是九点圆的直径。若这两条西姆松线相交于 X，则 $\angle MXM'=90°$(定理2.7.1)，故 X 在九点圆上。

2. 在等边三角形中，垂心和外心重合。

§2.8

1. 本题的证明在实质上和蝴蝶形定理的证明是相同的，只要改变几个符号。

2. 设 O 是圆心，Q 是 AT 和 BP(的延长线)的公共点。因为 OP 平分 $\angle TOB$，而 $\angle TOB$ 是 $\angle TAB$ 的两倍，故
$$\angle POB=\angle QAB.$$
这样，PO 平行于 QA。因为 O 是 BA 的中点，P 是 BQ 的中点。因为 $\triangle AHT\sim\triangle ABQ$，故 TH 的中点落在 AP 上。

3. 假定 $AB<AC$(若不然，可将 B 和 C 的位置互换)．在 AB 上取 B'，在 AC 上取 C'，使 $B'C'$ 与内切圆相切于 Z'(即 X 的对径点)。则 $\triangle AB'C'\sim\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$ 的内切圆与 $B'C'$ 切于 AX 上的点 X'。这两个内切圆有内公切线，长度为 $t'=XZ'$；也有外公切线(它们是 AB 和 AC 上的线段)，假定其长度为 t。显然
$$B'X'=\frac{1}{2}(t-t')=Z'C'.$$

同理，如果 AZ'(延长)和 BC 相交于 Z，则 $BX=ZC$。

因此 BC 的中点 A' 也是 XZ 的中点。但是 I 是 XZ' 的中点，因此 XA 的中点与 A'. I 共线(此解是索科洛夫斯基给出的)。

§2.9

1. 直线 UX, VY, WZ 平分等边三角形 XYZ 的角。
2. $A = 108°$, $B = C = 36°$.
3. 圆周被 A, Y', Z' 分成三段等弧，弧 $Y'Z'$ 被 Z 和 Y 分成三个相等的部分。
4. 用图2.9B 的记号，

$$\angle BZX = 60° + \alpha, \qquad \angle BXC = 120° + \alpha.$$

因此

$$\frac{ZX}{\sin\beta} = \frac{BX}{\sin(60° + \alpha)},$$

$$\frac{BX}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(120° + \alpha)} = \frac{2R\sin 3\alpha}{\sin(60° - \alpha)},$$

$$ZX = \frac{2R\sin 3\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha)}$$

$$= \frac{4R\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)\sin\beta\sin\gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120°}$$

$$= 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

5. 把 $\triangle XYZ$ 的边取作量度的单位，则

$$BC = Y'Z' = 3, \qquad BY' = CZ' = \sqrt{3},$$

$$\tan\angle CBX = \tan\angle CBZ' = \sqrt{3}/3,$$

$$\tan\angle ZBY' = 1/\sqrt{3},$$

$$\angle CBX = \angle ZBY' = 30°.$$

§ 3.1

1. 在图3.1B 中，$PS = QR = BD/2$，故 $PS + QR = BD$。同理，$PQ + RS = AC$。
2. 把 § 1.3 习题 6 用于图3.1F 的三角形ABC, CDA, BDX。(在这个定理中，"任意四角形"可以包括各组相邻边落在四个不同平面上的挠四角形在内，注意到这一点是有益处的。)
3. 因 $XY = 0$，用习题2。
4. 用托勒密定理(即定理2.6.1)。

§ 3.2

1. 从圆外一点向圆作的切线是相等的，且 $s = a + c = b + d$，用定理3.2.2。
2. (i) 84. (ii) $4\sqrt{26}$。
3. $r = (ABC)/s = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$。
4. 根据 § 1.4的习题 5 和 § 1.1的习题3，

$$r_a + r_b + r_c - r$$

$$= (ABC) \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{(ABC)abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{(ABC)} = 4R,$$

$$(I_aI_bI_c) = (I_aCB) + (I_bAC) + (I_cBA) + (ABC)$$

$$= \frac{1}{2}(ar_a + br_b + cr_c) + sr$$

$$= \frac{1}{2}s(r_a + r_b + r_c - r) - \frac{1}{2}(s-a)r_a$$

$$-\frac{1}{2}(s-b)r_{\bullet}-\frac{1}{2}(s-c)r+\frac{3}{2}sr$$

$$=\frac{1}{2}\cdot s\cdot 4R-\frac{3}{2}(ABC)+\frac{3}{2}(ABC)$$

$$=2sR.$$

5. $K=\frac{abn}{4R}+\frac{cdn}{4R}=\frac{(ab+cd)n}{4R}=\frac{lmn}{4R}$.

6. $l=a$, $m=b$, $n=c$, $K=abc/4R$.

7. 把§1.1的习题3用于图3.2B中的两个三角形，再把结果相加。用另一条对角线 l 代替 n 得到K的另一个表达式。把这两个表达式相乘，再利用托勒密定理(定理2.6.1)。

8. 比较角V和W的平分线分圆所得的弧。

9. 从P向矩形的各组平行边作垂线，然后用毕达哥拉斯定理四次(易见，P也可以落在矩形所在的平面之外)。

10. 设$ABCD$是内接于直径为d的圆的四角形，P是该圆上的已知点。由§1.3习题9，P到AB和CD的距离之积是

$$\frac{PA\times PB}{d}\cdot\frac{PC\times PD}{d}=\frac{PB\times PC}{d}\cdot\frac{PD\times PA}{d}$$

$$=\frac{PA\times PC}{d}\cdot\frac{PB\times PD}{d}.$$

§3.3

1. 作位于边BC和CA上的正方形的对角线CP和CQ，作以AB为斜边的等腰直角三角形BAR。因为$\triangle PCB\sim\triangle CQA\sim\triangle BAR$，于是可用定理3.3.3和定理3.3.5。

2. (i) PO_1, QO_2, RO_3 是 $\triangle ABC$ 的各边的垂直平分线。

(ii) 设 AO_1, BO_2, CO_3 与 $\triangle ABC$的各边相交于 X, Y, Z，则

$$\frac{BX}{XC}=\frac{(ABO_1)}{(CAO_1)}=\frac{c\sin(B+30°)}{b\sin(C+30°)},$$

对于 CY/YA 和 AZ/ZB 有类似的表达式，再用塞瓦定理的逆定理。

(iii)因为 $\triangle PCA \cong \triangle BCQ$，故 $PA=BQ$。同理，$BQ=CR$。又有 $\angle PFC=\angle PBC=60°$，$\angle CFQ=60°$，$\angle QFA=60°$，故 $\angle PFA=180°$，即F 落在 AP 上。同理可证F落在BQ 和 CR 上，这三条线在F点构成六个$60°$角[6, p.22]。

3. 如习题 2 (ii)，用塞瓦定理的逆定理。

4. 设想把图3.3B和3.3C拼在一起。因为六个三角形BO_1N_1, CN_1O_1, CO_2N_2, AN_2O_2, AO_3N_3, BN_3O_3都是等边三角形，而六个三角形 AN_3O_2, AO_3N_2, O_3BN_1, N_3BO_1, N_2O_1C, O_2N_1C 都正相似于 $\triangle ABC$，并且它们彼此是合同的，故

$N_3O_2=O_3N_2=BN_1=BO_1=O_1C=N_1C=a/\sqrt{3}$,

$N_1O_3=O_1N_3=CN_2=CO_2=O_2A=N_2A=b/\sqrt{3}$,

$N_2O_1=O_2N_1=AN_3=AO_3=O_3B=N_3B=c/\sqrt{3}$.

因为 $\angle O_1BO_3=\angle O_1BN_1+\angle N_1BO_3=60°+B$,

$\angle BO_3N_2=\angle BO_3A-\angle N_2O_3A=120°-B$,

故四角形 $BO_1N_2O_3$(它的对边相等)是平行四边形。用X记 O_2O_3 的中点，用 B' 记 CA 的中点(也是 O_2N_2 的中点)，于是直线 XB' 平行于 O_3N_2 和 BO_1。因为 $BO_1=2XB'$，故直线 O_1X 和 BB'的交点 G 适合$O_1G=2GX$, $BG=2GB'$。但 O_1X 和 BB' 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 和 $\triangle ABC$ 的

中线，因此这两个三角形以G为它们的公共重心。用$BN_1O_2N_3$代替平行四边形$BO_1N_2O_3$，同理可知G也是$\triangle N_1N_2N_3$的重心。

§3.4

1. 设AX, BY, CZ是外角平分线，则

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

2. 设AX', BY'是内角平分线，CZ是外角平分线，则

$$\frac{BX'}{CX'}\cdot\frac{CY'}{AY'}\cdot\frac{AZ}{BZ}=\left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{a}{c}\right)\cdot\frac{b}{a}=1.$$

§3.5

1. 如果AC和BD平行，由平行四边形$ABDE$和$CDFA$得到$BD=AE$，$DF=CA$，再相加便得$BF=CE$。因此$EFBC$是平行四边形，EF平行于BC。另一方面，如果AC和BD不平行，设它们的交点为O。因为

$$OA/OB=OE/OD,\qquad OC/OD=OA/OF,$$

故
$$OB\times OE=OA\times OD=OC\times OF,$$

因此$OE/OF=OC/OB$。

2. 如图3.5A和3.5B，设C和F是两组共点线组的公共点，L是AB和DE的交点。由帕普斯定理，L落在MN上，即AB, DE, NM共点。

3. 根据帕普斯定理，直线MN经过平行四边形的中心L，因此它把对边分为成对相等的线段。

4. 9个点；9条直线；经过每一点有三条直线：在每一条直线上有三个点，

§3.6

1. 如果两个三角形 PQR，$P'Q'R'$ 关于 O 点是透视的，并且 QR 平行于 $Q'R'$，RP 平行于 $R'P'$，则有

$$OQ/OQ' = OR/OR' = OP/OP'.$$

因此 PQ 平行于 $P'Q'$.

2. 10个点；10条直线；过每一点有三条直线；在每一条直线上有三个点.

3. (i) OQR 和 $P'FE$；(ii) $OQ'R'$ 和 PFE；(iii) ERR' 和 FQQ'.

4. 每个五角形的顶点落在另一个五角形的边上。总共有六对这样彼此内接的五角形。例如 $RPP'Q'D$ 和 $EFQOR'$ 就是其中的一对。

5. 设 P 是三角形 PQR 的一个顶点，Q 和 R 在两条已知直线 e 和 f 上。在 QR 的延长线上取 D 点，在 RP 的延长线上取 E 点，让 DE 和 QP(延长)相交于 F。对于 e 上的任意一点 Q'，设 DQ' 与 f 相交于 R'，ER' 与 FQ' 相交于 P'。则 PP' 就是所求的经过 P 的直线。如果直线 e 和 f 互相平行，则用上面的作图法能得到经过 P 点，且与已知直线平行的直线。（若不然，便和定理3.6.2相矛盾。）

§3.7

1. 延长 AB, CD, EF，构成三角形 UVW，使 A 和 B 在 UV 上，C 和 D 在 VW 上，E 和 F 在 WU 上。因为 $UE = AD = FW$，我们有 $UF = EW = BC$。这样，$BCFU$ 是平行四边形，CF 平行于 AB。关于重心的问题，设 X 和 Y

分别是 BE 与 CF, AD 的交点。则 $CDEX$ 和 $BCDY$ 是平行四边形，它们的中心 A' 和 F' 是对角线 DX 和 DB 的中点，落在平行于 BX 和 AF 的直线上。因为

$$AF = BX = 2F'A',$$

直线 AA' 和 FF' 相交于 G，使得 $AG = 2GA'$，$FG = 2GF'$。但是 AA' 和 FF' 是 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 的中线。因此这两个三角形以 G 为它们的公共的重心。

2. 六种。

§3.8

1. 设六角形 $ABCDEF$ 的顶点 A, B, C, D, E 落在一个圆上，AF 和圆相交于 F'。如图3.8A，三个点 $L = AB \cdot DE, M = CD \cdot FA, N = BC \cdot EF$ 已知是共线的。把帕斯卡定理用于六角形 $ABCDEF'$，则 EF' 和 EF 都经过点 $N = BC \cdot LM$，因此 F' 和 F 重合。

2. 图3.8B 已表明帕斯卡定理是如何用于退化的六角形 $ABBDEE$ 的。所求的结果同样可从 $AABCCE$ 和 $ABCCEA$ 得到。

§3.9

1. 利用退化的六角形 $BQCEPF$。
2. AC，BE，QF。
3. 利用退化的六角形 $AZBXCY$。

§4.1

1. 把线段 a 分别看成两个方向相反的向量，把 $\triangle ABC$ 右平移成 $\triangle A'B'C'$，再把 $\triangle ABC$ 左平移成 $\triangle A''B''C''$。联

结点 $AB \cdot A''C''$ 和 $AC \cdot A'B'$.

2. 由等边三角形构成的图案，围绕每个顶点有六个三角形。

§4.2

1. 绕正方形的中心旋转90°.
2. (i) 因为 $CX/b = a/(a+b)$，故

$$\frac{CX}{XA} = \frac{CX}{b - CX} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}.$$

同理，$BY/YC = a/b$. 又有

$$\frac{AH}{HB} = \frac{(CAH)}{(CHB)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

因为现在有

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

再用塞瓦定理就行了.

(ii) $\triangle ABC$ 是中心在 BC 的中点M处的平行四边形 $ABFC$ 的一半. 把习题 1 用于这个平行四边形，于是 $MO_2 = MO_3$，并且它们互相垂直. 此外，$MO_1 = MC$，且它们互相垂直. 因此，绕 M 旋转 90° 把 $\triangle MO_1O_2$ 变为 $\triangle MCO_3$.

(iii)完成矩形 $KCGC'$ 和平行四边形 $DAJA'$, $IBEB'$. 将它们分别绕 O_1, O_2, O_3作正向和负向旋转90°，可见六个三角形 $B'IB$, $C'CG$, $CC'K$, $JA'A$, DAA', BEB' 与 $\triangle ABC$ 是正全等的. 因此点 U, V, W 是矩形和这两个平行四边形的中点.

3. 若等边三角形已作出，将它绕一个顶点旋转60°，考察所得的结果.

§ 4.3

1. 其中一个圆绕 A 点旋转180°，它与另一个圆还有一个交点。把这个交点和 A 点相联结。
2. 设 O 和 r 是已知圆的圆心和半径。分别以 A 和 O 为圆心，以 r 和 $2r$ 为半径作圆，它们的交点设为 O_1 和 O_2。A 与 OO_1（或 OO_2）的中点的连线就是所求的直线。
3. 考虑关于一条对角线的中点的中心对称。

§ 4.4

1. 在 AB 边上的高线足。
2. 设 AB 是底边。第三个顶点 C 必定落在平行于 AB 的直线上，则只要使 $AC+CB$ 为极小就行。
3. 以 A 和连心线中点的连线为镜子。

§ 4.6

1. 一种方法为(12,0,0)，(7,5,0)，(7,0,5)，(2,5,5)，(2,1,9)，(11,1,0)，(11,0,1)，(6,5,1)，(6,0,6)。
2. 先把容量为11盎斯和5盎斯的瓶子盛满，把盛有 8 盎斯香液的瓶子给一个强盗。剩下的香液用其余的瓶子按照问题[16；13,11,5]来分，再用四步就能解出这个问题。
3. 采用图1.9B的记号，可知有相似的四角形 $AC_1PB_1 \sim AB'_1P'C'_1$。

§ 4.7

1. 是一个圆，它的半径等于已知圆半径的一半。
2. 在 BC 边上向外侧作正方形 $CBED$。直线 AD, AE 和 BC 的

交点给出了所求正方形的两个顶点。

§4.8

1. 设$\triangle AB'C'$是动三角形的任意一个新位置。因为$\triangle ACC' \sim \triangle ABB'$，故$\angle ACC' = \angle ABB' = \angle ABC$。
2. 从§3.3的习题4的答案给出的全等的线段组可见，绕G点旋转120°把O_1变到O_2，把O_2变到O_3，把O_3变到O_1，把N_3变到N_2，把N_2变到N_1，把N_1变到N_3。自然，还有一个相似变换把O_1, O_2, O_3分别变到N_1, N_2, N_3。但是这个相似变换是反相似变换：它是一个位似变换与一个反射之和[6, PP·74-75]。

§4.9

1. $x' = x + a,\ y' = y + b$。
2. $x' = -x,\ y' = y$。
3. $x' = y,\ y' = x$。
4. $x' = -x,\ y' = -y$。
5. $x' = kx,\ y' = ky$。
6. $x' = -ky,\ y' = kx$。
7. $x' = x + a,\ y' = -y$。
8. $x' = kx,\ y' = -ky$。
9. $x' = x^3,\ y' = y$。
10. $x' = x,\ y' = \begin{cases} y, & x \geq 0, \\ -y, & x < 0. \end{cases}$

§5.1

1. $AC//BD$, $AC//DB$, $CA//BD$, $CA//DB$, $BD/$

$\measuredangle AC, DB/\ /AC, BD/\ /CA, DB/\ /CA$。

§ 5.2

1. $\{BA, DC\} = \dfrac{BD \times AC}{BC \times AD} = \dfrac{AC \times BD}{AD \times BC} = \{AB, CD\}$。类似地有其余各式。

2. (i) 1; (ii) 2; (iii) 3; (iv) 1.

§ 5.3

1. 四个全等的半圆所组成的象花朵状的图形(即以正方形的边为直径在外侧作半圆所构成的图形。)

2. 内心和傍心。

3. (i)设圆 ω 与以 P 为圆心,以 PO 为半径的圆相交于 A 和 B。以 A 和 B 为圆心，并且经过 O 点的两个圆有另一个交点 P'，则 P' 就是 P 的反演点。

   (ii) 利用圆规从任意点 P_1 出发可作 P_2，使 $OP_2 = 2OP_1$。同理可作出 P_n，使 $OP_n = nOP_1$。若 $OP_1 > k/2n$，则 $OP_n > k/2$，如(i)可作 P_n 的反演点 P'_n。则 P_1 的反演点 P'_1 适合 $OP'_1 = nOP'_n$。

4. (i) 与 $\triangle ABC$ 自己相似。

   (ii) 与垂三角形 DEF 相似(利用 p.42的 2.4.4)。

   (iii) 与傍心三角形 $I_aI_bI_c$ 相似(根据 § 1.4 的习题 4 和定理1.6.1)。

5. $\left(\dfrac{k^2x}{x^2+y^2}, \dfrac{k^2y}{x^2+y^2}\right)$。

6. 作等腰三角形 BO_1C,使它在 B 和 C 的角等于 $A + D - 90°$；作等腰三角形 CO_2A,它在 C 和 A 的角等于 $B + E - 90°$。

分别以 O_1 和 O_2 为圆心作圆，使它们经过 C 点，则另一个交点就是所求的圆心 O。半径 k 满足

$$k^2=\frac{OA\times OB\times DE}{AB}.$$

§5.4

1. 设 O 是 ω 的圆心。则
$\triangle OAP\sim\triangle OPA'$，　　$PA/PA'=OA/OP=$ 常数。
2. 设 BC 是直径，则 $\triangle POB\sim\triangle COP'$，并且
$$PO/OB=CO/OP' \quad OP\times OP'=k^2.$$
3. 设 P 和 Q 是已知圆 α 内部的点。关于以 P 为圆心的一个圆作反演，则得 P_∞，Q' 和 α'。因为 P_∞ 在 α' 的外部，故 Q' 也在 α' 的外部。从 Q' 向 α' 作的切线可以看作经过 P_∞ 和 Q' 的圆，它们是经过 P 和 Q，并且与 α 相切的两个圆的反演像。
4. 以三个切点中的一点作为反演圆圆心，则图形就反演为两条平行直线及与它们相切的一个圆。
5. 以 A 为反演圆圆心，则得到三个反演点 B'，C'，D'，并且 C' 落在线段 $B'D'$ 上的充要条件是 $AC//BD$。根据定理 5.4.1，"三角形不等式" $B'C'+C'D'\geqslant B'D'$ 等价于
$$\frac{BC}{AB\times BC}+\frac{CD}{AC\times AD}\geqslant\frac{BD}{AB\times AD},$$
即　　$AD\times BC+AB\times CD\geqslant AC\times BD.$
6. 若 ω 和 α 相交或相切，结论是明显的。若不然，可设 ω 和 α 的方程是
$$x^2+y^2=k^2,\qquad x^2+y^2=ax.$$

由§5.3习题 5，α 关于 ω 的反演像的方程是

$$\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{k^2y}{x^2+y^2}\right)^2=a\cdot\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2}\right),$$

即 $k^2=ax$。

7. 相交，第二个交点是 P_∞。

§5.5

1. 该圆经过 ω 与以 OA 为直径的圆的交点.
2. 设 P' 是 P 的反演点，所求的圆就是圆 $PP'Q$。
3. 设 P 关于 ω_1 和 ω_2 的反演点分别是 P_1 和 P_2，所求的圆是圆 PP_1P_2。
4. 它们的积是 k^4。
5. 以 O 为反演圆圆心，得反演像 a' 及 a' 上的点 P'。a' 在 P' 处有唯一的一条切线。或者以 P 为反演圆圆心，得直线 a 及不在 a 上的点 O'。经过 O' 有唯一的一条直线与 a 平行。

§5.6

1. 因为$\triangle AB_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 在关于直线 AS 的反射下是合同的，故
$$\angle BSC_1=\angle SBA-\angle SC_1B=B-C.$$
2. 由§1.7习题3，$A'D=(b^2-c^2)/2a$。我们已知 $A'S=a(b-c)/2(b+c)$，因此
$$A'S\times A'D=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

§5.7

1. $c+c'=0$。

2. 设半径分别为 a,b 的两个相切圆的中间圆半径是 r。把切点取作反演圆圆心，则以上三个圆反演为到反演圆心的距离分别为 $k^2/2a, k^2/2b, k^2/2r$ 的平行直线，而且后者是前两条平行线的等距点轨迹，故

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

3. 我们得到两族彼此正交的平行线，比如方程分别为 $x=\text{const}$，$y=\text{const}$ 的直线族。

4. 在中间圆上取一点 O 作为反演圆圆心，则中间圆反演成一条直线，于是关于中间圆的反演就变成关于上述直线的反射。

5. 关于直线的反射是关于圆的反演的特殊情形。

6. (i)若 $AC//BD$，设 γ 是这四点所在的圆。设 α,β 是与 γ 正交的两个圆，一个经过 A,C，另一个经过 B,D。设圆 α 和 β 的交点是 L 和 O，则以 L 为反演圆心把 α 和 β 反演成圆 γ' 的两条直径，使 $A'B'C'D'$ 为以 O' 为中心的矩形。

   (ii)若 $AB//CD$ 或 $AD//BC$，设 γ,α,β 如(i)所定义。但是，现在的圆 α 和 β 不相交。设 L 和 O 是共轴圆束 $\alpha\beta$ 的极限点；换言之，L 和 O 是 γ 与 α,β 的连心线的交点。以 L 为反演圆心把 α,β 反演为以 O' 为圆心的同心圆。因为 $A'C'$ 和 $B'D'$ 是这两个同心圆的直径(在一条直线上)，故 $A'B'C'D'$ 是退化的平行四边形。

   (iii) 若 A,B,C,D 不共圆，则它们确定了四个不同的圆 ABC, ACD, ABD, BCD。设 μ 是 ABC 和 ACD 的一个中间圆，并且它把点 B 和 D 隔开(即在 B 和 D 中有一点在 μ 的内部，有一点在 μ 的外部；若 μ 恰好是直线，则

要求B和D在该直线的两侧)。同理，设ν是ABD和BCD的中间圆，且把A和C隔开。设圆μ和ν相交于L和O。以L为圆心的反演圆ω把ABC和ACD反演成两个全等的圆$A'B'C'$和$A'C'D'$，它们的根轴μ'把B',D'隔开，并且$\angle A'B'C'=\angle C'D'A'$。同理，$\omega$把$ABD$和$BCD$反演成全等的圆$A'B'D'$和$B'C'D'$，它们的根轴$\nu'$把$A'$,$C'$隔开，且$\angle D'A'B'=\angle B'C'D'$。因此$A'B'C'D'$是平行四边形[17, P. 99]。

在以上各种情形都把点对LO称为两对点AC和BD的雅可比①。

7. 设两个已知圆在连心线上的直径分别是AB和CD,并且$AC//BD$。设α和β分别是以AD和BC为直径的圆，L和M是共轴圆束$\alpha\beta$的极限点。则所求的圆就是以LM为直径的圆(因为这个圆与α,β正交，并且它把A反演成D，把B反演成C)。

§5.8

1. 用§5.7的习题4。
2. 把$\theta=(\pi/2)+(\pi/n)$代入三角恒等式

$$\csc\theta-\cot\theta=\tan\frac{1}{2}\theta.$$

3. 从反演几何学的角度来看，这两组圆的配置只是斯泰纳的系在$n=4$的情形。因此有三对圆的反演距离是$2\log(\sqrt{2}+1)$，其余12个反演距离为零。

① 见Coxeter, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 29(1966)p.233.

§5.9

1. 较小的反演距离 δ 满足

$$\cosh\delta=\left|\frac{1+1-(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right|=\sqrt{3}+1.$$

较大反演距离的双曲余弦是

$$\left|\frac{1+1-4(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right|=4\sqrt{3}+7$$

$$=2\cosh^2\delta-1=\cosh 2\delta.$$

夹在中间的圆不是另外两个圆的中间圆，因为它与那两个圆不是共轴的。

2. 索蒂圆可以从斯泰纳的系令 $n=3$ 得到；因此

$$\cosh\frac{\delta}{2}=\sec\frac{\pi}{3}=2.$$

3. 长度之比的平方是

$$\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab}$$

$$=\frac{\cosh\delta-1}{\cosh\delta+1}=\tanh^2\frac{\delta}{2}$$

4. 第一部分从图上看是明显的。至于第二部分，用定理5.9.1及 $a=b, c=2p$ 得

$$\cosh 2\delta=\frac{(2p)^2-b^2-b^2}{2b^2}=2\left(\frac{p}{b}\right)^2-1.$$

5. $2\sinh^2\frac{\delta}{2}+1=\cosh\delta=\frac{r^2+R^2-(R^2-2rR)}{2rR}=\frac{r}{2R}+1.$

6. 从图1.3看到

$$AH = b\cos A\csc B = 2R\cos A.$$

又由§1.6习题4得到

$$OH^2 = R^2 + (2R\cos A)^2 - 4R^2\cos A\cos(B-C)$$
$$= R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

因为 $ON = OH/2$，于是$\cos\delta$

或 $$\cosh\delta = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - R^2\left(\frac{1}{4} - 2\cos A\cos B\cos C\right)\right\}\Big/R^2$$
$$= 1 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

7. 利用习题4，把根轴 $x = 0$ 取作其中的那条直线，则我们有 $\cosh\alpha = a/\sqrt{a^2 - d^2}$，$\cosh\beta = b/\sqrt{b^2 - d^2}$。

§6.1

1. 因为ω把直径为OA的圆反演成极线a，故这两个圆和这条直线属于同一个共轴圆束；即a是这两个圆的根轴。
2. A和B的极线分别垂直于OA和OB。
3. 因为任意一个图形关于以O为圆心的两个同心圆的配极像是彼此相似的，我们把正多角形$ABC\cdots$的内切圆取作配极圆，则边$AB, BC, \cdots$的极点是线段$AB, BC, \cdots$的中点，点$A, B, C, \cdots$的极线是上述相邻的中点的联线。如果把这个正多角形的外接圆取作ω，则圆在多角形各顶点处的切线构成的多角形是原正多角形的配极像。
4. 矩形的两条对边的极点到O点的距离相等，并且它们与O点在一条直线上。另外两条对边的极点到O点的距离也相等(一般说来，这个距离和前面的距离不相等)，并且

落在这两边的经过 O 点的垂线上。这样，我们得到其对角线互相垂直平分的四角形，即菱形。另一种考虑是，矩形的对称轴把外接圆在各顶点处的切线截出长度相等的线段。

§6.2

1. 根据定理6.2.1，三角形的极圆平分它的外接圆和九点圆的一个夹角，这个角在三角形的钝角趋于180°时逐渐趋于零。因此，用§5.9习题 6 的记号，只要命

$$\theta=(180°-\delta)/2.$$

§6.3

1. 关于圆 α，B_2 的极线是 b_2；关于圆 β，B_0B_2 的极点是C_1，如此等等。
2. 本节的第一个图形关于直线OA是对称的，在直线上面的图形可以和直线下面的图形完全重叠在一起。图 6.3A 和图 6.3C 的外观形状表明椭圆和双曲线可能有另一个垂直于 OA 的"镜子"（在§6.6要证明这个性质）。
3. 从图6.3B可见，抛物线的切线 t 是圆 α 上的点 T 的极线。从 O 向 t 所引的垂线足是 T 关于 ω 的反演点。它的轨迹（即经过 O 点的圆 α 的反演像）是一条直线。
4. 从图 6.3C 看到，渐近线 u 作为U的极线垂直于直角三角形 OAU 的边 OU.因此这个三角形在 A 处的角是θ，且

$$\sec\theta=\frac{OA}{AU}=\frac{OA}{r}=\varepsilon.$$

对于直角双曲线来说，$\theta=45°$，$\varepsilon=\sqrt{2}$.

5. 轨道形状为抛物线或双曲线的彗星是不会回到太阳的近

旁的。但是不能确证曾经见到过这种彗星。虽然由于行星(尤其是质量巨大的木星)的扰动，我们所见到的彗星的某段轨道有时看起来象一段双曲线，而有些椭圆轨道拉得很长以至于无法同抛物线区别开，但是所有已知的彗星(包括“非周期的”,即被我们见过一次而从未见过第二次的彗星)一般地都看作是太阳系的成员。它们相对于太阳的速度从未达到足以跑到“外部空间”去的程度(所谓“外部空间”是指别的恒星的引力比太阳引力大的地方)。

§6.4

1. $x^2+y^2=(l-\varepsilon x)^2$。
2. 在 $x=l/(\varepsilon\pm1)$之间的中点是 $x=-\varepsilon a$。新方程是

$$(x-\varepsilon a)^2+y^2=[l-\varepsilon(x-\varepsilon a)]^2=(a-\varepsilon x)^2,$$

或 $$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2=(1-\varepsilon^2)a^2=la=\pm b^2,$$

或 $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,$$

正负号根据 $\varepsilon<1$ 或 $\varepsilon>1$ 而定。因为方程中只出现 x 和 y 的偶次幂，故椭圆和双曲线关于两个坐标轴是对称的。

§6.5

1. 如果两个三角形关于一点是透视的，则它们关于一条直线是透视的。如果两个三角形关于一条直线是透视的，则它们关于一点是透视的。
2. 如果六角形的六个顶点交替地落在两条直线上，则三组对边的交点是共线的。如果六角形的六条边交替地经过两个点，则三条对角线是共点的[7, pp. 38, 90]。

3. 它们是经过圆心的彼此垂直的直线。

4. 因为 l_∞ 是 O 的极线，故圆锥曲线上任意一个无穷远点是圆 α 的经过 O 的切线(关于 ω)的极点。因此，根据 O 在圆 α 的内部、圆上或外部，圆锥曲线上相应的无穷远点的个数是 0,1 或 2。

5. 用图6.3C的记号，OU 是 α 在 U 处的切线；因此，双曲线上的一个无穷远点是切线 u 的切点，而另一个无穷远点自然是 v 的切点。

6. 因为准线是 A 的极线，准线上的任意一点是 α 的一条直径的极点，所以从这样的一个点向抛物线所作的两条切线是该直径的两个端点的极线。因为 α 上的对径点在 O 点张成一个直角，所以它们的极线互相垂直。

7. 三组“对边”的交点中每一个都可以作为定理 6.5.1 的点P，而其余两点落在该点的极线上。

§6.6

1. $OP+O_1P=\varepsilon PK+\varepsilon K_1P=\varepsilon K_1K$。这是两条准线之间的距离的 ε 倍。

2. 如图 6.6C，当P 在双曲线的左分支上时，有
$$OP-O_1P=\varepsilon PK-\varepsilon PK_1=-\varepsilon KK_1.$$
对于右分支只要把正负号反过来就行。

3. 这个圆是 α(关于ω)的反演像(与 §6.3的习题3相对照)。

§6.7

1. 球极投影是反演的特殊情形。

2. 垂直平分直径 OA 的平面(图6.7A)沿着一个特殊的大圆与 α' 相交(这个大圆称为赤道)。别的大圆必与赤道在

它的对径点相交.赤道的特征是它的直径投影为直径(后者是指平面 α 上圆心为 A,半径为 $2k$ 的圆的直径).

3. 我们把 P_1' 和 P_2' 看作 α' 上两个大圆的交点，而其中一个大圆通过 O 和 A。这样，α 上的点 P_1 和 P_2 在经过 A 点的一条直线上，又在经过“赤道的投影”(圆心为 A,半径为 $2k$ 的圆)的两个对径点(设为 Q_1 和Q_2)的一个圆上。因为

$$AP_1 \times AP_2 = AQ_1 \times AQ_2 = -(2k)^2,$$

故 P_1 和P_2 是在一个反-反演变换下相关的，这个反-反演变换是关于“赤道的投影”的反演与关于 A 的中心对称之和。

4. 取球 α' 与正方体的12条棱(在中点处)相切，O 是 α' 与正方体的对角线的一个交点。(如果取 O 是 α' 与正方体两个相对面的中心连线的一个交点，则得到斯泰纳的系在 $n=4$ 时给出的对称图形。)

参考文献

[1] W.W.R.Ball and H.S.M. Coxeter, Mathematical Recreations and Essays(12th ed.), Univ. of Toronto Press, 1974, Toronto.

[2] E.T.Bell, Development of Mathematics, McGraw Hill, 1945, New York.

[3] E.T.Bell, Men of Mathematics, Simon and Schuster, 1937, New York.

[4] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, 1941, New York.

[5] N.A.Court, College Geometry(2nd ed.),Barnes and Noble, 1952, New York.

[6] H.S.M.Coxeter, Introduction to Geometry(2nd ed), Wiley, 1969, New York.

[7] H.S.M.Coxeter, Projective Geometry(2nd ed.), Univ. of Toronto Press, 1974, Toronto.

[8] H.S.M.Coxeter, Regular Polytopes(3rd ed.), Dover,1973, New York.

[9] C.V.Durell, A Course of Plane Geometry for Advanced Students, Part I ,Macmillan, 1909, London.

[10] C.V.Durell, 同上, Part II, Macmillan, 1910, London.

[11] L.Fejes Tóth, Regular Figures, Pergamon, 1964, Oxford (England).

[12] H.G.Forder, The Calculus of Extension, Chelsea, 1960, New York.

[13] H.G.Forder, Geometry, Hutchinson, 1960, London.

[14] H.G.Forder, Higher Course Geometry, Cambridge Univ. Press, 1949.

[15] G.H.Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, 1940.

[16] D.Hilbert and S.Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, Chelsea, 1952. New York.(王联芳译，直观几何，上册(1959年)，下册(1964年)，人民教育出版社出版)。

[17] R.A.Johnson, Advanced Euclidean Geometry, Dover, 1960, New York.

[18] N.A.Kazarinoff, Geometric Inequalities, New Mathematical Library, vol.4, 1961, Random House, New York and the L. W.Singer Co., Syracuse. (刘西垣译，几何不等式，北京大学出版社，1985)。

[19] H.Lamb, Statics, Cambridge University Press, 1916.

[20] E.H.Lockwood, A Book of Curves,Cambridge University Press, 1961.

[21] T.H.O'Beirne, Puzzles and Paradoxes, Oxford University Press, 1965, London.

[22] O.Ore, Graphs and Their Uses, New Mathematical Library, vol.10, 1963, Random House, New York and the L.W.Singer Co., Syracuse.

[23] D.Pedoe, Circles, Pergamon, 1957, London.

[24] H.Perfect, Topics in Geometry, Pergamon, 1963, London.

[25] J.Petersen, Mathods and Theories for the Solutions of Problems of Geometrical Construction Applied to 410 Problems, Stechert, 1923, New York.

[26] V.G.Shervatov, Hyperbolic Functions, D.C.Heath and Co., 1963, Boston.

[27] A.S.Smogorzhevskii, The Ruler in Geometrical Constructions, Blaisdell, 1961, New York.

[28] B.L.van der Waerden, Science Awakening, Oxford University Press, 1961, New York.

[29] I.M.Yaglom, Geometric Transformations I, New Mathematical Library, vol.8, 1962, Random House, New York and the L. W.Singer Co., Syracuse.(尤承业译，几何变换 I，北京大学出版社，1986)。

名词解释

汉普蒂·达姆普蒂(Humpty Dumpty)说过:"当我使用一个词时,它刚好是指我用它来表达的意思——既不多一点,也不少一点。"

C.L. 多德桑

(*ABC*)——$\triangle ABC$的面积.

n-角形——有 n 个顶点和 n 条边的多角形.

三角形的中线——经过三角形的一边中点的塞瓦线.

三角形的内心(I)——内切圆的圆心.

三角形的内切圆——内切于三角形的圆.

三角形的内切圆半径(r)——三角形的内切圆的半径.

三角形的外心(O)——三角形的外接圆的圆心.

三角形的外接圆——外接于三角形(经过三角形的三个顶点)的圆.

三角形的外接圆半径(R)——三角形的外接圆的半径.

三角形的垂心(H)——三条高线的交点.

三角形的重心——三条中线的交点.

三角形的高线——从顶点向对边(或它的延长线)引垂线所得的线段.

三角形的傍心(I_a, I_b, I_c)——三角形的傍切圆的圆心.

三角形的傍切圆——与三角形的一边及其余两边的延长线相切的圆.

三角形的傍切圆半径(r_a, r_b, r_c)——三角形的傍切圆的半径.

$\triangle ABC$ 的三重相切圆——与 $\triangle ABC$ 的三边(或延长线)都相切的四个圆；内切圆和三个傍切圆。

$\triangle ABC$ 的久格纳点——经过内切圆与 $\triangle ABC$ 的各边的切点的三条塞瓦线的公共点。

$\triangle ABC$ 的中位三角形——$\triangle ABC$ 的各边中点的连线构成的三角形。

$\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点 P 的西姆松线——点 P 向 $\triangle ABC$ 各边所作垂足的连线（退化的垂足三角形所在的直线）。

$\triangle ABC$ 的垂三角形($\triangle DEF$)——$\triangle ABC$ 的高线足的连线所构成的三角形。

$\triangle ABC$的欧拉线——垂心、重心和外心所在的直线。

$\triangle ABC$ 的拿破仑三角形。

内拿破仑三角形——在内侧立在 $\triangle ABC$ 的各边上的等边三角形的中心所构成的三角形。

外拿破仑三角形——在外侧立在 $\triangle ABC$ 的各边上的等边三角形的中心所构成的三角形。

无穷远直线——把直线看作半径无限大的圆时，各平行线束的圆心所在的假想的直线.

无穷远点，P_∞——在看作反演平面上的圆时所有的直线的假想的公共点。

中心对称变换——旋转角为180°的旋转。

中心相似变换——有一个不动点的位似变换。

中间圆，或反相似圆——使两个已知圆互为反演像的反演圆。

反演平面——添加了单独一个假想点（无穷远点 P_∞）的欧氏平面。

双曲线——离心率$\varepsilon>1$的圆锥曲线，这时O点在圆α的外部(参看圆锥曲线)。

双曲线的渐近线——从O向α所引切线的切点的极线。

正交圆——两个相交的圆，并且它们在一个交点的两条切线彼此成直角。

正多角形——有一点(称为中心)到各顶点的距离相等、并且到各边的距离也相等的多角形。

正相似变换——保持角度和指向不变的直射变换。

平行移动——联结各点及其像点的有向线段有相同的长度和方向的变换。等价的说法是：沒有不动点的位似变换。

平面的变换——从平面到自身的映射，使平面上每一点P都有唯一的像点P'，并且每一点Q'都有唯一的原像点Q。

包络——曲线的切线构成的集合。

四边形——参看四角形。

四角形——有四个顶点和四条边的多角形。

凸四角形——两条对角线都在四角形的內部。

凹四角形——一条对角线在內部、另一条对角线在外部的四角形。

交叉四角形——两条对角线都在四角形的外部。

四角形的瓦里农平行四边形——联结四角形的邻边中点的线段所构成的平行四边形。

四点的交比——$\{AB,CD\}=(AC/BC)/(AD/BD)$。

共轭直线——直线a和经过a的极点的任意一条直线。

共轭点——点A和落在A的极线上的任意一点。

共轴圆——一族圆，其中每两个圆的根轴都相同。等价的说法是，它是与两个已知圆都正交的圆的集合。

关于直线l的反射——以l为镜子，把每一点变到它的

镜像点的变换。

有心圆锥曲线——椭圆和双曲线。

曲线的渐近线——曲线的以无穷远点为切点的切线。

向量——参看平行移动。

同胚——双向连续的变换。

全等——参看等距变换。

多角形——平面上的封闭折线。

自极三角形——各顶点分别是它的对边的极点的三角形。

两个不相交圆 α 和 β 的反演距离——当 α 和 β 反演成两个同心圆时，这两个同心圆半径之比的自然对数。

两个不相交圆 α 和 β 的极限点——与 α 和 β 都正交的任意两个圆的交点.

两个非同心圆的根轴——关于这两个圆的幂相等的点的轨迹。

两个变换的积(或和)——第一个变换和第二个变换连续作用的结果。

两点的连线——联结两点的直线。

位似变换——把每一条直线变成它的平行直线的变换。保持方向不变的相似变换。

直线 p 关于圆心是 O 的圆 ω 的极点——从 O 向 p 作垂线足的反演像. 或者是 p 上任意两点的极线的交点。

直线束——在平面上经过一点的所有直线构成的集合.

直射变换——把直线变到直线的变换。

拓扑学——对应于一一的双向连续变换的群的几何学。

波赛列反演器——用来描绘已知曲线的反演像的仪器。

抛物线——离心率 $\varepsilon=1$ 的圆锥曲线，这时 O 在圆 α 上。

顶点在一个圆(或一条圆锥曲线)上的六角形的巴斯加线——该六角形的三组对边的交点所在的直线。

极圆——使一个钝角三角形的各顶点分别和对边成配极对应的配极圆。

相似变换——保持距离之比不变的变换。

点P关于一个圆的极线——作圆的两条经过P的割线(或弦)AD, BE，联结交点$AB \cdot DE$和$AE \cdot BD$的直线。

点P关于$\triangle ABC$的垂足三角形——从P向$\triangle ABC$的各边(或延长线)引垂线，它们的垂足所构成的三角形。

点P关于直线l的反射像——圆心在l上、经过P点的任意两个圆的第二个交点。

点P关于圆的幂——d^2-R^2，其中d是点P到该圆圆心的距离，R是圆的半径。

点P关于圆ω的反演像——经过P点，且与ω正交的任意两个圆的第二个交点。

圆内接四角形——顶点落在一个圆上的凸四角形（其对角互补)。

圆心不共线的三个圆的根心——其中每两个圆决定一条根轴，这三条根轴的公共点。

圆束$\alpha\beta$——与正交于α，β的两个不同的圆都正交的圆构成的集合。

圆锥曲线——圆α（圆心为A，半径为r）关于圆ω（圆心为O，半径为k)的配极像。

圆锥曲线的准线——A点关于圆ω的极线。

圆锥曲线的离心率——$\varepsilon=OA/r$。

圆锥曲线的焦点——配极圆ω的圆心O。

配极——把点变成它的极线，把直线变成它的极点的变

换。

射影平面——添加了一条假想的直线(参看无穷远直线)的欧氏平面。

旋转——整个平面绕平面中一个固定点转动所产生的变换。

旋转相似变换——旋转和位似变换的积，或反过来。

球上的大圆——经过球心的平面在球上的截线。

球上的对径点——球的直径的两个端点。

球心投影——一个球从它的球心到任意一个切平面上的投影。

球极投影——从 O 点把经过 O 点的球映到球在 O 的对径点处的切平面上的投影。

割离性 $AC//BD$ (对同一个平面上的四点而言)——经过A,C的每一个圆与经过B,D的每一个圆都相交。

等距变换——保持长度不变的变换。

塞瓦线——联结三角形的一个顶点及其对边(或延长线)上一点的线段。

椭圆——离心率$\varepsilon<1$的圆锥曲线，这时 O 在 α 的内部。

索　　引

二　画

三　画

四　画

五 画

六 画

七 画

八　画

九 画

十 画

十一画